



MÉTRICA DE CAYLEY: recepção britânica

Leandro Silva Dias¹

Gerard Emile Grimberg²

Magno Luiz Ferreira³

RESUMO

A Sexta Memória sobre os *quantics* é muito conhecida por ter inspirado Félix Klein ao desenvolver seus trabalhos sobre geometria não euclidiana. Nestes artigos, Klein classifica as geometrias a partir da definição de métrica, conhecida como métrica de Cayley-Klein, pois esta métrica teve como inspiração a Sexta Memória de Cayley. O próprio Klein cita isso nos seus trabalhos, deixando claro a fonte para seu raciocínio sobre métrica. Depois destes trabalhos a Sexta Memória ganhou notoriedade e é muito conhecida, seja por matemáticos, historiadores ou qualquer pessoa interessada em geometrias. Neste trabalho, tratamos de analisar a recepção da métrica de Cayley pela comunidade britânica. Para isto, investigamos sete periódicos britânicos identificando os artigos que tratam de assuntos relacionados ao que faz Cayley na sua Sexta Memória. A metodologia de rede textos é utilizada para ajudar a relacionar os diversos artigos do período de 1859 a 1880 e extrair os resultados que nos permitem esclarecer a dinâmica desta comunidade ao redor do tema métrica de Cayley.

Palavras-chave: Métrica. Cayley. Rede de textos.

INTRODUÇÃO

A Sexta Memória⁴ sobre os *quantics* possui um papel fundamental ao estabelecer, a partir do espaço projetivo, uma métrica que pode ser levada a um caso limite a métrica euclidiana. Este artigo deve ser o mais famoso das centenas que Cayley escreveu, além de ter circulado nas mais diversas comunidades matemáticas da segunda metade do século XIX.

Este trabalho tem o objetivo de analisar a recepção da métrica de Cayley na comunidade britânica. Ou seja, estudar como interagem os matemáticos

¹ Doutorando (PEMAT/UFRJ) / Docente do Instituto Federal do Rio de Janeiro – Campus Volta Redonda (IFRJ). leandro.dias@ifrj.edu.br.

² Docente da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ). gerard.emile@terra.com.br.

³ Doutorando (PEMAT/UFRJ) / Docente do Instituto Federal do Rio de Janeiro – Campus Volta Redonda (IFRJ). magno.ferreira@ifrj.edu.br.

⁴O termo Memória utilizado neste trabalho significa uma dissertação sobre um tema acadêmico.



XV SNHM
Seminário Nacional de História da Matemática
 Abril de 2023
 Maceió - AL



geograficamente mais próximos de Cayley que trabalharam ou repercutiram sobre métricas, partindo da sexta Memória sobre os *quantics*.

Para analisar a recepção entre os matemáticos britânicos, utilizamos a metodologia conhecida como “rede de textos”, pois é um método que propicia uma análise global sobre como intervêm diversos autores a cerca de um tema comum. Nossa análise consistiu de um total de sete periódicos britânicos no período compreendido entre 1859 até 1880.

Metodologia

Para analisar como se relacionam as obras de vários matemáticos num dado período, especialmente publicações de um dado periódico, utilizamos a metodologia conhecida como “rede de textos”. Brechenmacher constrói uma rede de textos de diferentes matemáticos, a partir de um ponto inicial, que tratam de diferentes formas a noção de matriz (BRECHENMACHER, 2006, p.8). Ele encontra um período para sua pesquisa, 1850-1930, a partir das leituras dos diversos textos que tratam de matrizes. As interseções entre os usos do conceito de matriz representam os “nós” dessa “rede”. Para nosso trabalho, os pontos comuns foram determinados a partir de uma análise cuidadosa de como os trabalhos sobre métrica podem ser classificados.

Importante destacar que a relação entre os textos pode ser direta, ou seja, um texto faz referência a outro texto, ou pode ser indireta, através de elementos que indicam que eles participam de uma mesma prática, compartilhando de mesmos conceitos, temas ou práticas.

Brechenmacher (2006, p.9) chama dos “nós”, entrelaçamentos de referências, que, no caso da pesquisa de Brechenmacher, foram utilizados para destacar as diferentes práticas contidas nos textos que tratavam de matrizes, em nossa pesquisa essas intersecções entre os textos nos permitem tratar de vários aspectos da obra de Cayley no meado do século XIX.

Nossa pesquisa se utiliza desse conceito de pontos de confluência a fim de destacar um campo de pesquisa na em geometria no meado do século XIX. Assim,



XV SNHM
Seminário Nacional de História da Matemática
 Abril de 2023
 Maceió - AL



nosso trabalho residiu em analisar os diversos textos que utilizavam o conceito de métrica munida de algumas propriedades da geometria, tais como: perpendicularidade, relação harmônica e involução.

Campo de pesquisa é entendido como apresentado por Catherine Goldstein. Ela afirma:

Argumenta-se que se tratava de um campo (de pesquisa), no sentido de que “todas as pessoas que estão envolvidas no [este] campo têm em comum um certo número de interesses fundamentais, isto é, em tudo o que está ligado à própria existência do campo”, e que se pode descobrir “a presença na obra de vestígios de relações objetivas ... para outros trabalhos, passados ou presentes, [do campo]” (GOLDSTEIN et al., 2007, p.52)⁵.

Ou seja, quando pessoas pertencem a um determinado campo de pesquisa, possuem certo número de interesses fundamentais comuns. Neste trabalho, os estes pontos são aqueles já apresentados na formação da rede de textos.

O corpo de fontes primárias a serem considerados para tal programa é enorme (fontes publicadas, correspondência, programa de ensino...). É absolutamente necessário destacá-lo para objetivar a dinâmica. Propomos num primeiro momento, construir um banco de dados bibliográfico de livros, artigos, definindo o conteúdo de algumas palavras-chave e identificando sistematicamente as referências. Esta será uma oportunidade para implementar as metodologias de “redes de texto” (BRECHENMACHER, 2006) e “redes de referência”. O interesse de tal método é heurístico ao possibilitar fazer aparecer polaridades (mesmo que sejam muitas das vezes esperadas, a rede de texto dá uma justificativa para destacá-las), proximidades e o que é frequentemente o mais interessante para a análise da dinâmica de circulação de noções e textos, a ausência de interação entre eles que numa análise de conteúdo retrospectiva simples poderia considerar como

⁵We argue that it constituted a (research) field, in the sense that “all the people who are engaged in [this] field have in common a certain number of fundamental interests, viz., in everything that is linked to the very existence of the field,” and that one can uncover “the presence in the work of traces of objective relations ... to other works, past or present, [of the field].”



XV SNHM
Seminário Nacional de História da Matemática
 Abril de 2023
 Maceió - AL



próxima. É importante ressaltar que a relação entre os textos pode ser direta, ou seja, que um texto se refere a outro texto, ou que pode ser indireta, por meio de elementos que indicam que eles participam da mesma prática e compartilham os mesmos conceitos, temas ou práticas, o que implica que o banco de dados é construído ao mesmo tempo (e permanente) que os elementos relevantes do ponto de vista práticos e teóricos são pensados no estudo de casos.

Nesta análise textual, serão cruzados com um estudo de comunidades e partes interessadas envolvidas em redes de circulação para destacar seus “interesses fundamentais comuns” (GOLDSTEIN et al., 2007, p.52) e, assim, “tecer” alguns “fios” dessas redes de pesquisa em geometria. Esperamos assim esclarecer como o que Cayley desenvolve sobre métrica interferem, a partir da Sexta Memória sobre os *quantics*, na comunidade britânica.

Crítérios de seleção dos textos

Definido o conjunto de periódicos e a periodicidade, falta estabelecer os critérios para seleção dos textos que devem compor a rede.

Esses critérios partiram de dois trabalhos: a Sexta Memória sobre os *quantic* de Cayley e das definições apresentadas no *Principes de Géométrie Analytique* de Darboux. Numa leitura desses textos percebe-se que há algumas características comuns, que compõem o que Darboux (1917, p.289) chama de “geometria de Cayley”. Darboux considera, inicialmente, as geometrias esféricas e plana, e por projeção, utilizando a razão anarmônica, mostra que é possível estabelecer as noções de ângulo e distância numa? forma única, ou seja, que se mantém ao passar da geometria esférica para a plana. Ele afirma: “Nosso objetivo agora é estudar uma geometria devido ao grande geômetro inglês Cayley, e no qual todas as noções métricas são obtidas por um processo uniforme” (DARBOUX, 1917, p.290)⁶. Darboux explora em seu livro o pensamento de Cayley que parte da

⁶ Notre but est d'étudier maintenant une Géométrie due au grand géomètre anglais Cayley, et dans laquelle toutes les notions métriques sont obtenues par un procédé uniforme.



XV SNHM
Seminário Nacional de História da Matemática
 Abril de 2023
 Maceió - AL



geometria esférica com o objetivo de estabelecer uma métrica que dá conta, inclusive, da métrica euclidiana.

Nossos critérios para seleção dos textos foram os seguintes: primeiro, a utilização de noções de distância e/ou ângulos numa abordagem analítica com uso de coordenadas homogêneas, utilizando princípios da geometria projetiva.

Segundo, a citação direta a uma das Memórias sobre os *quantics*, ou a menção do termo *quantic*, acrescido do uso de propriedades geométricas. Considerou-se também termos relacionados a teoria dos invariantes: invariante, covariante, hessiano, jacobiano, discriminante, etc., sempre relacionados com propriedades geométricas.

Terceiro, a utilização dos termos, “distância”, “métrica”, “ângulo” e “trigonometria” associados aos métodos analíticos em coordenadas homogêneas ou as geometrias não euclidianas.

Quarto e último, a citação direta dos trabalhos de Félix Klein sobre as geometrias não euclidianas ou sobre as formas binárias.

Alguns resultados da pesquisa

A concentração de textos sobre a “geometria de Cayley” se mostra decrescente conforme nos afastamos da publicação da Sexta Memória e chegamos próximo ao fim do século XIX. Em sete anos temos quase metade dos textos, e antes de 1871 temos 35 textos, ou seja, a publicação do primeiro artigo de Félix Klein sobre as geometrias não euclidianas teve pouco impacto na comunidade britânica. Como veremos, apenas Clifford cita o trabalho de Klein, além de um comentário no relatório de maio de 1873, no *Proceedings of the London Mathematical Society*, sobre o texto que trata das formas binárias.

O primeiro artigo selecionado é de Cayley, intitulado *On the Double Tangents of a Plane Curve*, publicado no *Philos. Trans. R. Soc.*, em 1859. É o mesmo volume que consta a Sexta Memória sobre os *Quantics*. Neste artigo, Cayley investiga os casos de tangente dupla de curvas planas de *quantics* ternárias. Tangente múltipla era definida conforme Salmon (1852, p.34): “[. . .] retas



XV SNHM
 Seminário Nacional de História da Matemática
 Abril de 2023
 Maceió - AL



que tocam a curva em dois ou mais pontos”⁷, nesse contexto tangente dupla é aquela que toca a curva em dois pontos. Cayley cita os trabalhos de Plücker, *Solution d’une question fondamentale concernant la théorie generale des Courbes* (1834) e *Theorie der algebraischen Curven* (1839), ambos do jornal de Crelle. Além do trabalho de Hesse, *Ueber die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung* (1844), também do jornal de Crelle. Jacobi, *Beweiss des Satzes, dass eine Curve w-ten Grades im allgemeinen 1 .n.(n – 2).(n2 – 9) Doppeltangenten hat* (1844), também sobre o número de tangentes de uma curva dado o seu grau. A relevância destas citações por Cayley é que nos ajuda a entender a dinâmica da pesquisa, principalmente como a geometria algébrica desempenhou um papel importante no trabalho com os *quantics*, que desencadeou nas considerações métricas presentes na Sexta Memória. Neste caso, estas citações a Plücker, Hesse e Jacobi testemunham o quanto estas pesquisas eram internacionalizadas.

Além dos matemáticos estrangeiros, verifica-se uma estreita relação entre os trabalhos de Cayley e Salmon, com destaque para o livro de Salmon, *Treatise on the Higher Plane Curves* (1852), citado para tratar de métodos para encontrar os pontos da tangente dupla de uma curva. Para o caso de tangentes a curvas de terceiro grau, cita o artigo de Salmon *On Curves of the Third Order*, além do artigo *On the Double Tangents to Plane Curves* (1858) do *Philos. Mag.*, que trata do mesmo tema sobre o qual Cayley trabalha neste artigo de 1859. Apesar desta relação já ser bem explorada pela historiografia, nos interessa pelo fato de mostrar como Salmon participou na constituição do que seria chamado por Darboux de “geometria de Cayley”.

Logo em janeiro de 1859, Cayley submete uma Nota⁸ intitulada *Note on a theorem in spherical trigonometry* ao *Philos. Mag.*. Como já mostramos em nossa apresentação da Sexta Memória, a geometria esférica desempenha um papel importante no processo criativo de Cayley ao redigir sobre a métrica no contexto dos *quantics*. Esta Nota nos mostra que alguns teoremas da trigonometria esférica

⁷[. . .] lines which touch the curve in two or more points.

⁸O termo Nota aqui significa uma dissertação acadêmica que acrescenta ou corrige informações de um artigo, livro ou outro documento.



XV SNHM
 Seminário Nacional de História da Matemática
 Abril de 2023
 Maceió - AL



faziam parte das investigações de Cayley. Nesta Nota, ele faz uma breve demonstração do teorema que diz que dado a, b, c serem os lados de um triângulo e A, B, C , seus respectivos ângulos opostos, então valem as relações:

$$\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a,$$

$$\sin c \sin a + \cos c \cos a \cos B = \sin C \sin A - \cos C \cos A \cos b, e$$

$$\sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B \cos c.$$

No mesmo periódico, no mesmo ano e volume, G. B. Airy possui um artigo que faz observações ao teorema de geometria esférica de Cayley que acabamos de apresentar. Intitulado *The Astronomer Royal's Remarks on Mr. Cayley's Trigonometrical Theorem, and on Professor Challis's Proof that Equations have as many Routs, &c*, é um pequeno artigo com duas partes, uma dedicada ao teorema de Cayley e outra a uma prova apresentada por Challis's. Estas partes não possuem nada em comum. Destaca-se aqui o interesse pelo teorema em trigonometria esférica apresentado por Cayley.

Ainda no mesmo volume do *Philos. Mag.*, há uma notícia sobre a publicação do livro de Salmon, *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra*, que é interessante pois testemunha da recepção dos trabalhos sobre teoria dos invariantes, com sua aplicação geométrica. O editor começa dizendo que:

“Nos últimos dezoito anos, o campo antigo e bem trilhado da Álgebra foi invadido por uma série de novos e estranhos intrusos, com nomes estranhos de “Determinantes”, “Hiperdeterminantes”, “Discriminantes”, “Emanantes”, “Invariantes”, “Evectants”, “Bezoutiants”, “Hessians” (sem conexão, no entanto, com “Botas” ou “Cadinhos”), “Canonizants” (sem religião), “Dialytics / e “Quantics”.⁹ (BREWSTER et al., 1859, p.67, Tradução nossa)

Os dezoito anos são contados a partir do trabalho sobre transformações lineares de 1841, de George Boole, que é citado nesta notícia como iniciador do

⁹Within the last eighteen years the old and well-trodden field of Algebra has been invaded by a host of new and strange intruders, with the odd-sounding names of “Determinants”, “Hyperdeterminants”, “Discriminants”, “Emanants”, “Invariantes”, “Evectants”, “Bezoutiants”, “Hessians” (having no connexion, however, with either “Boots” or “Crucibles”), “Canonizants” (of no religion), “Dialytics”, and “Quantics”.



XV SNHM
Seminário Nacional de História da Matemática
 Abril de 2023
 Maceió - AL



que o editor chama de “álgebra de transformações lineares”¹⁰ (BREWSTER et al., 1859, p.67). O editor relata que a partir desse artigo de Boole, Cayley descobre que a propriedade de invariância não era peculiar somente às funções apresentadas por Boole, trazendo à luz outras que possuíam essa mesma propriedade. Destaca também a relevância geométrica dessa teoria, dando como exemplos: primeiro, que dada a equação de uma curva ou superfície, pode-se encontrar uma outra equação de curva ou superfície que possui relações permanentes com a primeira, independente da mudança dos eixos coordenados; e que a teoria nos apresenta uma função dos coeficientes da equação dada que quando igualadas a zero expressa uma propriedade da curva ou superfície, também independente dos eixos coordenados.

Outro fato interessante a se destacar é que o editor considera que, mesmo para matemáticos experientes que por algum motivo não acompanharam o desenvolvimento da teoria, os textos com tantos termos/conceitos novos se mostravam “ininteligíveis”. Além de dizer que, no início, não se mostrava um campo de pesquisa frutífero, mas que naquele momento já demonstrava possuir muitos resultados importantes. Daí o editor destacar a importância deste livro de Salmon, dizendo que o tema é muito valioso para que seja desconhecido por muitos matemáticos. O editor afirma: “sinto que essas pessoas estarão prontas para receber um guia elementar para este ramo da Álgebra”¹¹ (BREWSTER et al., 1859, p.68). No final da Notícia¹² do livro ele dá uma sugestão de leitura para quem deseja aprender sobre o tema:

A partir deste livro do Sr. Salmon, tomado em conjunto com o do Spottiswoode sobre 'Determinantes', e o trabalho de Brioschi (traduzido do italiano para o francês por Combescure), qualquer um pode aprender o suficiente sobre o assunto para qualificá-lo para ler as Memórias originais dos Srs. Cayley, Sylvester, etc.¹³(BREWSTER et al., 1859, p.68, Tradução nossa)

¹⁰ Algebra of Linear Transformations.

¹¹ I feel that such persons will be ready to welcome an elementary guide to this branch of Algebra.

¹² Notícia aqui significa um texto acadêmico que divulga a obra de um matemático ou pesquisador.

¹³ From this book of Mr. Salmon, taken in conjunction with Mr. Spottiswoode's on 'Determinants,' and the work of Brioschi (translated from the Italian into French by Combescure), any one may learn



XV SNHM
 Seminário Nacional de História da Matemática
 Abril de 2023
 Maceió - AL



A pesquisa dos diversos textos que compõem a “rede” nos ajudou a compor uma lista de artigos que identifica os diversos autores e suas respectivas obras citadas. Então, pode-se perceber que o livro de Spottiswoode citado acima, intitulado *Elementary Theorems Relating to Determinants* (1851), foi mencionado apenas esta vez na “rede de textos”. O mesmo ocorreu com o livro de Brioschi, *Théorie des Déterminants* (1856). Isso se deve ao fato de serem obras elementares sobre o assunto, como afirma a próprio editor, não sendo trabalhos de primeira linha, como eram os artigos de Cayley ou Sylvester, por exemplo. Mas testemunha de como o tema era ensinado nas universidades britânicas, principalmente pelo fato dos livros de Spottiswoode serem muito utilizados por estes estudantes. O livro de Brioschi nos remete a um panorama mais geral, pois perpassa muitas fronteiras de países como Itália, França e Reino Unido. Além do fato da tradução francesa ser acrescida de um extenso apêndice, com várias Notas, sendo as duas últimas dedicadas a teoria dos invariantes de Cayley, Sylvester e Salmon. Nesse contexto, o livro de Salmon, que hora fora noticiado, preenche as lacunas existentes no ensino e divulgação do que era chamado de “álgebra moderna”.

No mesmo ano, no *Philos. Trans. R. Soc.*, Cayley publica a Sexta Memória sobre os quantis. Neste mesmo volume, Cayley publica o artigo, intitulado *On the Conic of Five-pointic Contact at any point of a Plane Curve* (1859), no qual ele trabalha diversos teoremas geométricos utilizando a álgebra dos *quantics*. Neste texto, Cayley cita teorias, relacionadas a essa nova álgebra, de Plücker, Steiner e Sylvester, além de citar o livro *Higher Plane Curves*, de Salmon. Este livro de Salmon é o texto mais citado dentre os artigos de nossa “rede de textos”.

Este artigo investiga as cônicas que passam por cinco pontos consecutivos de uma curva plana. O problema foi investigado por Salmon num artigo anterior, porém Cayley se coloca a pesquisar o caso mais geral onde a curva é de grau qualquer. Cayley utiliza a notação que já temos apresentado, então para

enough of the subject to qualify him for reading the original memoirs of Messrs. Cayley, Sylvester, &c.



XV SNHM
Seminário Nacional de História da Matemática
Abril de 2023
Maceió - AL



representar uma curva de grau “m” ele toma a equação $Y = (*\xi X, Y, Z)^m$ ¹⁴, a partir da qual encontra a equação da cônica. Não vamos detalhar o extenso processo que Cayley desenvolve para encontrar a equação da cônica, porém percebe-se a todo momento um cuidadoso trabalho que envolve a álgebra dos quantics aliada a aspectos geométricos.

Exemplo de um dos teoremas demonstrados por Cayley neste artigo: “A corda comum da cônica de cinco pontos de contato e da cônica polar é a tangente à curva cúbica no ponto tangencial dado”¹⁵ (CAYLEY, 1859, p.388). Realmente, Cayley, Sylvester e Salmon pesquisaram sobre os casos de contato envolvendo cônicas e curvas planas, que faz parte das pesquisas dessa chamada “álgebra moderna”.

Seguindo os artigos de nossa rede de textos, em 1860, ainda no *Philos. Trans. R. Soc.*, há um artigo de Salmon, intitulado *On Quaternary Cubics*, que foi comunicado por Cayley e se coloca no contexto das Memórias sobre os *quantics*. Salmon afirma:

No livro de Memórias a seguir, proponho uma tentativa de enumeração dos invariantes, covariantes e contravariantes de um cúbico quaternário, isto é, de uma função homogênea de terceira ordem com quatro variáveis, que geometricamente representa uma superfície de terceira ordem. Esta Memória, então, continuará as Memórias de Cayley sobre *Quantics*, em que uma análise semelhante é realizada completamente para *quantics* binários até a quinta ordem e para *quantics* ternários até a terceira ordem.¹⁶ (SALMON, 1860, p.229, Tradução nossa)

¹⁴ Expressão de Cayley que representa um polinômio homogêneo de grau m. O asterisco significa que serão utilizados todos os coeficientes para o caso geral.

¹⁵ The common chord of the five-pointic conic and the polar conic is the tangent to the cubic at the tangential of the given point.

¹⁶ In the following memoir I propose to make an attempt at an enumeration of the invariants, covariants, and contravariants of a quaternary cubic, that is to say, of a homogeneous function of the third order in four variables, which geometrically represents a surface of the third order. This memoir, then, will be in continuation of Mr. Cayley's memoirs on *Quantics*, wherein a similar analysis is very completely performed for binary *quantics* as far as the fifth order, and for ternary *quantics* as far as the third order.



XV SNHM
Seminário Nacional de História da Matemática
 Abril de 2023
 Maceió - AL



Salmon considera este artigo uma continuação das Memórias sobre os quantics, além de objetivar encontrar invariantes para o caso dos polinômios homogêneos de quatro variáveis do terceiro grau, ele situa geometricamente esses polinômios dizendo que são superfícies de terceira ordem. Este artigo testemunha do quanto geométrico era o trabalho com os invariantes, do qual a Sexta Memória é a mais divulgada pela historiografia.

Uma das propriedades presentes nas Quinta e Sexta Memórias, e que é retomada por Salmon, diz que o determinante dos coeficientes das cônicas, quando igualado a zero, possui um significado geométrico que relaciona essas cônicas.

Outra notícia de livro no *Philos. Mag.*, agora em 1861, do livro *An Elementary Treatise on Trilinear Coordinates, the Method of Reciprocal Polars, and the Theory of Projections* de N. M. Ferrers. Este livro trata de vários aspectos importantes para a geometria de Cayley conforme vamos discutir em seguida. A começar por ter um papel importante no ensino em Cambridge, conforme a editor afirma este livro “ parece especialmente preparado com referência às necessidades dos estudantes da Universidade de Cambridge e será um complemento valioso para os trabalhos atualmente em uso como livros didáticos”¹⁷ (BREWSTER et al., 1861, p.240). Lembrando que para o nosso tema tem-se o livro de Salmon, que já apresentamos a notícia do *Philos. Mag.*, além do livro de Todhunter. Pode-se constatar o estabelecimento de uma nova disciplina, enquanto a pesquisa neste tema avançava nos periódicos britânicos.

O editor destaca que o livro dá conta de muitos termos, como: coordenadas trilineares, razão anarmônica, involução, polares recíprocos, etc., que permeiam os trabalhos dos matemáticos Sylvester, Salmon, Boole, Spottiswoode e Cayley. Apesar de não especificar quais trabalhos, ou seja, não há citação das obras desses matemáticos, isso reafirma o que temos encontrado na busca dos textos que compõe nossa rede de textos. Ou seja, há uma comunidade de pesquisa em torno do que chamamos de geometria de Cayley.

¹⁷ it seems especially prepared with reference to the wants of students in the University of Cambridge, and will prove a valuable complement to the works now in use there as text-books.



No *Oxf. Camb. Dub. Messenger Math.*, um artigo, intitulado *On Determinants* (1862), publicado por P. G. Tait, que poderia parecer não pertencer à nossa “rede de textos”, possui algumas informações importantes sobre a comunidade britânica que trabalha sobre “geometria de Cayley”. Primeiro, Tait situa seu artigo no contexto dos livros de Ferrers, *Trilinear Coordinates* e o editor do periódico faz uma Nota que situa este artigo no contexto do livro de Todhunter, *Theory of equations*, principalmente com relação ao capítulo sobre determinantes. O artigo trata do uso dos determinantes envolvendo sistemas compostos de equações homogêneas, se utilizando de reduções e congruências. Ao final do texto ele diz que “para desenvolvimentos mais elaborados desta teoria, e suas aplicações à geometria analítica, equações diferenciais da mecânica, etc., referência deve ser feita aos textos de Jacobi, Cayley, Sylvester, Hermite, Salmon, Boole, e Pierce”¹⁸ (TAIT, 1862, p.37).

Ainda em 1862, no *Philos. Trans. R. Soc.*, Cayley publicou o artigo *On the Analytical Theory of the Conic* que trata da decomposição em fatores lineares das quádras binárias e ternárias. A partir dos casos onde não há quadrados perfeitos, que seria muito simples, ele apresenta as vantagens de se escrever utilizando os fatores lineares, para investigar propriedades das cônicas, como por exemplo as tangentes de um ponto, ou os pontos de contato entre duas cônicas. No final, há uma adição posterior, onde Cayley afirma que Spottiswoode possui fórmulas interessantes que relaciona uma cônica e os pontos de intersecção com uma dada reta. Também cita Aronhold.

Podemos considerar Clifford o segundo matemático mais produtivo da rede, após Cayley, pois Cayley possui 19 textos, os editores 6 textos, R. Tucker 4 e Clifford 4. Então, desconsiderando os editores das revistas, e dado que R. Tucker também publicou algumas notícias e não trabalhos originais, podemos considerar Clifford o segundo mais produtivo da rede. Esse fato é importante, destacando que Sylvester aparece logo em seguida com 3 textos, apesar de a historiografia

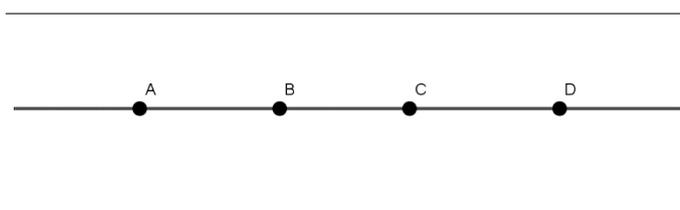
¹⁸ For the higher developments of this theory, and their applications to Analytical Geometry, the Differential Equations of Mechanics, &c, reference must be made to the writings of Jacobi, Cayley, Sylvester, Hermite, Salmon, Boole, and Pierce.



normalmente enfatizar a tríade: Cayley, Sylvester e Salmon, destacaremos a importância de Clifford na divulgação da “geometria de Cayley”.

Primeiro artigo de Clifford da nossa rede de textos, intitulado *On the General Theory of Anharmonics* (1866), foi publicado no *Proc. Lond. Math. Soc.*. Neste artigo, Clifford busca estabelecer uma teoria geral a partir da noção de distância. Ele inicia apresentando uma expressão que defini a relação de ordem numa dada reta. Para facilitar a leitura utilizaremos termos modernos e figuras. Assim sendo, a expressão fica: $AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$, conforme a figura abaixo.

Figura 1 – Ilustração reta



Fonte: próprio autor.

Assim, Clifford estabelece uma relação de ordem numa reta, de onde é possível estabelecer as noções de razão harmônica e anarmônica. Ele afirma que essas razões são invariantes sobre projeção ou transformações lineares, além de afirmar que o mesmo ocorre para o caso de quatro retas que se encontram num mesmo ponto, que seria a dualidade em relação aos quatro pontos sobre uma reta.

Ele ao desenvolver suas ideias acerca das razões, considerando pontos, retas ou planos, sente a necessidade de explicitar sua noção de “distância”. Percebe-se que Clifford (1866, p.4) busca definir distância para diversos casos, indicando que pretende uma generalização. Além dos casos já mencionados no trecho citado, ele considera a distância de quatro pontos, na geometria de três dimensões, como sendo o volume do tetraedro formado por estes pontos. A partir daí, ele considera a teoria o uso das razões anarmônicas, que é invariante sobre transformações projetivas, para definir a métrica utilizando a notação de Cayley. Por exemplo, para representar duas quádricas ele usa as letras U e V , e a relação invariante fica representada como $\square(U, V) = 0$.



XV SNHM
Seminário Nacional de História da Matemática
 Abril de 2023
 Maceió - AL



Como um primeiro artigo no tema, percebe-se que Clifford estava bastante interessado nos métodos analíticos que se utilizavam das razões anarmônicas para definir uma métrica projetiva. Isso se confirma nos próximos trabalhos de Clifford que analisaremos. Continuando no mesmo volume do *Proc. Lond. Math. Soc.*, ele publica o artigo *On a Generalization of the Theory of Polars*, que estabelece a ideia de curva polar de uma dada curva de um certo grau, relacionando a classe. Clifford (1868, p.116) afirma que desejou apresentar essas ideias à Sociedade, porque elas pareciam úteis para outros propósitos além daqueles apresentados no artigo, dizendo que desejava aplicá-los posteriormente, a extensão da Análise Geométrica de Grasmann. Quem apresenta a leitura de Clifford foi Sylvester que por aquele tempo já havia trabalhado bastante sobre Teoria dos Invariantes.

Considerações finais

O estudo dos periódicos e a análise utilizando a rede de textos nos indicam uma intensa comunicação ao redor do tema métrica, nos sete anos após a publicação da Sexta Memória sobre os *quantics*. Além disso, destacamos a participação de matemáticos britânicos, dentre os quais observamos a importância de Clifford neste tema. Clifford, além de ser um matemático diretamente ligado a Cayley, produziu trabalhos sobre o tema, ou seja, participou diretamente com suas contribuições.

REFERÊNCIAS

BRECHENMACHER, F. Les matrices: formes de représentations et pratiques opératoires (1850-1930). **Site expert des Ecoles Normales Supérieures**, 2006. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00142789/document>>. Acesso em: 12/2022.

BREWSTER, D.; KANE, R.; FRANCIS, W.; TYNDALL, J. **The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science**. [S.l.]: Taylor & Francis, 1859. v. 18.



XV SNHM
 Seminário Nacional de História da Matemática
 Abril de 2023
 Maceió - AL



BREWSTER, D.; KANE, R.; FRANCIS, W.; TYNDALL, J. **The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science.** [S.l.]: Taylor & Francis, 1861. v. 22.

CAYLEY, A. On the conic of five-pointic contact at any point of a plane curve. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 149, p. 371–400, 1859.

CLIFFORD, W. K. On the general theory of anharmonics. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 3–8, 1866.

CLIFFORD, W. K. On a generalization of the theory of polars. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 116–119, 1868.

DARBOUX, G. **Principes de géométrie analytique.** [S.l.]: Gauthier-Villars Paris, 1917. v. 2.

GOLDSTEIN, C.; SCHAPPACHER, N.; SCHWERMER, J. **The shaping of arithmetic after CF Gauss's Disquisitiones Arithmeticae.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.

SALMON, G. **A Treatise on the Higher Plane Curves.** [S.l.]: Hodges and Smith, Grafton-street, Booksellers to the University, 1852.

SALMON, G. On quaternary cubics. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 150, p. 229–239, 1860.

TAIT, P. G. On determinants. **The Oxford, Cambridge, and Dublin messenger of mathematics**, v. 1, p. 25–37, 1862.