NÚMEROS PRIMOS: recortes históricos e atividades para o ensino

Ruan Wenderson de Oliveira Sousa[1]
Lucicleia Chagas Magno[2]
Miguel Chaquiam[3]

RESUMO

Nesse trabalho objetiva-se associar a história da matemática ao ensino de conteúdos matemáticos, em específico, recortes da história dos números primos e atividades que exploram informações constantes no texto, observado que o tema escolhido consta nos documentos oficiais da educação brasileira. O trabalho é balizado pelo diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2022a), restrito ao contexto epistemológico, científico e técnico. A partir da revisão bibliográfica a respeito da história dos números primos, com a finalidade de identificar personagens e suas contribuições, foi elaborado um diagrama que balizou a escrita do texto e que também pode proporcionar uma visão geral dos personagens envolvidos, ordenados temporalmente. As atividades foram elaboradas a partir dos conteúdos matemáticos constantes no próprio texto ou com a possibilidade de comparação com o constante nos livros didáticos de matemática. Para além da utilização do texto durante a apresentação dos conteúdos matemáticos, é importante ressaltar que o desenvolvimento das pesquisas contribuiu para solidificação de conceitos históricos e matemáticos relacionados a temática, bem como a elaboração de um recurso didático para sala de aula. Por fim, os recortes históricos apresentados integrarão um conjunto composto de oito textos que envolvem história e matemática.

Palavras-chave: História da Matemática. Números Primos. Recortes Históricos dos Números Primos. Atividades com História e Matemática.

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência considerada de fundamental importância para o desenvolvimento e progresso da humanidade e que, de acordo com Mendes (2022), este desenvolvimento e progresso devem ser compreendidos a partir da história, tendo em vista o planejamento da vida no geral no nosso dia-a-dia, assim como o planejamento das ações educativas nos mais diversos níveis de ensino.

1 Bolsista Voluntário PIBIC da Universidade do Estado do Pará (UEPA). ruanwoliveira@gmail.com
2 Bolsista PIBIC-CNPq da Universidade do Estado do Pará (UEPA)). lucychagasmagno@gmail.com
3 Professor da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Miguel.chaquiam@uepa.br

Ademais, a História da Matemática é apontada por literaturas e documentos oficiais como um recurso didático eficiente para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem do aluno, porém, apesar da eficiência que ela pode proporcionar, existe uma escassez de referenciais teóricos que fazem uso da História da Matemática.

Tendo em vista a produção de materiais que relacionem história e conteúdos matemáticos, para esse trabalho foi estabelecido como objetivo associar a história da matemática ao ensino de conteúdos matemáticos, em especifico, recortes da história dos números primos e atividades que exploram informações constantes no texto, observado que o tema escolhido consta nos documentos oficiais da educação brasileira.

Chaquiam (2022b) aponta que parte desses materiais podem ser elaborados pelo professor o professor em consonância com sua práxis e pesquisas no campo da Educação Matemática, ou seja,

> Nesse sentido, percebe-se a necessidade de o professor buscar metodologias e formas diversificadas para o ensino, de modo a contribuir à melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem de matemática. No campo da Educação Matemática identifica-se claramente alternativas que podem contribuir para um trabalho mais eficaz do professor e uma maior aprendizagem por parte dos alunos, a saber, História da Matemática, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas e Etnomatemática, dentre outras. (CHAQUIAM, 2022b, p. 1226)

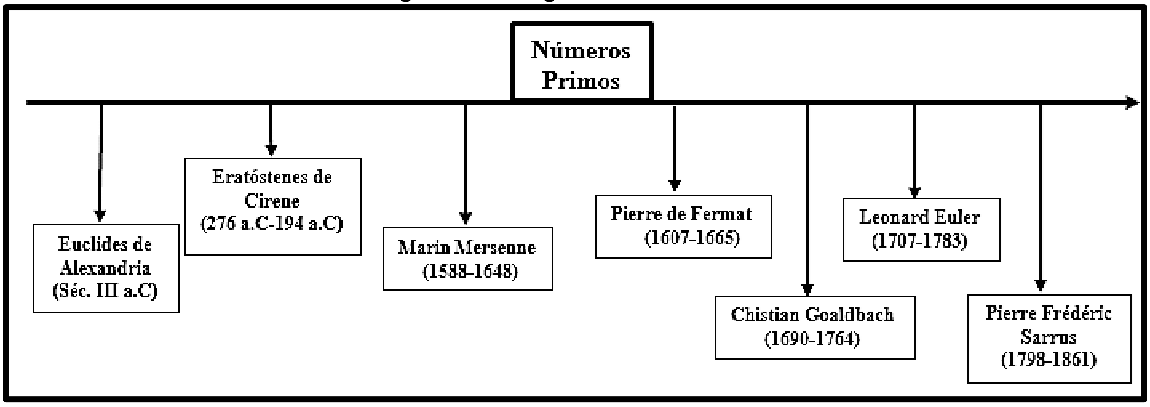
Visando suprir a falta de parâmetros para aplicação pedagógica, emerge o constructo proposto por Chaquiam (2015, 2016, 2017, 2020, 2022a), um diagrama-metodológico orientador que destaca o saber matemático numa dinâmica multifacetada e contextualizada onde é possível estabelecer, segundo Chaquiam (2020), dentro de diversos contextos, interrelações socioculturais e científicas no âmbito das mais diversas áreas do conhecimento, atrelado ao personagem que se pretende destacar ou aos seus contemporâneos, sob o prisma triangular focado nos contextos: epistemológico, científico e técnico – intermediário (numa perspectiva pluri-multi-trans-inter) – histórico, sociocultural e geopolítico – didático-pedagógico. Esses contextos constituem as diferentes dimensões de abordagens, lentes pelas quais o tema/conceito/objeto deve ser intentado.

Desde as versões anteriores, o diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2020, p.10) tem por objetivo "orientar a elaboração de um texto envolvendo tópicos de história da Matemática associada a personagens/matemáticos e objetos/temas/conteúdos ministrados em sala de aula". O texto elaborado com base no modelo proposto pode proporcionar a reconstrução de etapas que marcaram a constituição e evolução histórica dos objetos/temas/conteúdos matemáticos, etapas abordadas dentro de um contexto didático-pedagógico e que contemplam atividades que associam história e matemática e que podem ser utilizadas durante o processo de ensino.

Chaquiam (2022a) esclarece detalhadamente cada uma das etapas dos procedimentos para desenvolver a pesquisa histórica, bem como a ordem a ser seguida ao longo da busca dos recortes que irão constituir o diagrama. Os textos resultantes do diagrama-metodológico revelam diversas possibilidades de composição, principalmente em função do ponto de vista didático-pedagógico.

Aqui, restringimo-nos a apresentação de um recorte das pesquisas vinculadas ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC-CNPq-UEPA) por meio do projeto *História da Matemática para o Ensino: textos, contextos e atividades*, que tem por objetivo "Elaborar textos com recortes da história dos objetos/temas/conteúdos matemáticos selecionados, amparados em Chaquiam (2020), de modo que o texto e as atividades possam ser utilizados durante o processo de ensino dos conteúdos específicos envolvidos".

Figura 1: Diagrama – Números Primos



Fonte: Elaborado pelos autores a partir Chaquiam (2022a)

O diagrama acima, Figura 1, é uma adaptação do diagrama-metodológico proposto por Chaquiam (2022a), visto que é um recorte do contexto epistemológico, científico e técnico relativo aos números primos.

Nesse diagrama constam os personagens que foram abordados no texto a seguir, bem como suas contribuições a constituição e evolução dos conteúdos relacionados aos números primos. Ressaltamos que as atividades apresentadas estão divididas em dois grupos – ensino básico e ensino superior – envolvem os conteúdos matemáticos discorridos e, em alguns momentos exigirão do leitor o entendimento do conteúdo matemático exposto para resolução das proposições.

Seguindo a ordem de apresentação dos personagens constante no diagrama, iniciamos por Euclides de Alexandria (Séc. III a.C), professor, matemático platônico e escritor grego. Sua principal obra *os Elementos*, no sétimo e nono livro comportam definições referente a aritmética dos pitagóricos, destacadas a seguir.

No livro VII consta a seguinte definição: *Um número primo é o que é apenas medido por uma unidade* (ESTRADA; SÀ et al, 2000 p. 277). Nesse sentido, Euclides acreditava que os números primos eram o que podiam ser medidos por apenas uma unidade, ou seja, não poderia ser medido por mais que uma unidade como eram os números compostos, a exemplo, o número seis pode ser medido de duas em duas unidades, ou de três em três unidades, e também por uma unidade igual a seis, diferentemente do número três que pode ser medido por apenas uma unidade igual a três.

A definição atual de números primos é: *Diz-se que o inteiro positivo p > 1 é um número primo ou apenas um primo se, e somente se, 1 e p são seus únicos divisores positivos*. Caso contrário, diz-se que um número inteiro positivo maior do que 1 é composto quando não for primo (FILHO, 1981 p.116). Fato que nos leva a afirmar que Euclides se aproxima da definição que temos atualmente de números primos.

No livro IX, a definição constante é: *Números primos são mais do que qualquer quantidade dada de números primos* (ESTRADA e SÁ et al, 2000 p. 278). Esta definição aponta para a infinitude dos números primos, mas sem

Euclides explicitamente tratá-los como infinito por conta de sua corrente filosófica, a aristotélica.

Além disso, Euclides provou um importante resultado que conhecemos hoje como Teorema Fundamental da Aritmética, *Todo número natural maior que 1 ou é um número primo, ou pode ser escrito unicamente como um produto de primos* (BENTLEY, 1972 p. 47). A título de exemplo, apresentamos a decomposição do número 51, ou seja, sua decomposição em fatores primos é expressa por 3 x 17 = 51, o que nos leva a inferir que 51 é um número composto.

Ainda na Idade Antiga, temos Eratóstenes de Cirene (276-196 a.C), considerado o primeiro bibliotecário de Alexandria, dedicou-se a gramática, filosofia, poesia, e a ciência. Sua contribuição a esta última está relacionada ao cálculo da circunferência e a inclinação do eixo da terra, em especial, o método para calcular números primos até um inteiro n pré-estabelecido, denominado de de *Crivo de Eratóstenes*. Esse método consiste em escrever todos os números naturais a partir do número 2*s* até número n, em seguida, exclui-se os múltiplos estritos dos números da sequência. (ESTRADA; SÀ et al, 2000, p. 280)

Assim, para determinar todos os primos do número 2 a 10, primeiro vamos eliminar em ordem, todos os múltiplos de 2, 3 e 5, do tipo 2k, 3k e 5k, ou seja 2, 3, 4, 5, 6,7,8,9,10, neste caso, restaram apenas 2, 3, 5 e 7, que são todos os primos de 2 e 10. Outro método para se construir a tabela de primos consiste em eliminar todos os inteiros compostos que múltiplos dos primos p tal que $p \leq n^{1/2}$, ou seja, para saber quais são os primos menores que o número 100, basta extrair a raiz quadrada de n, neste caso, $100^{1/2} = 10$, portanto, resta apenas eliminar todos os múltiplos de 2, 3, 4, 5 e 7.

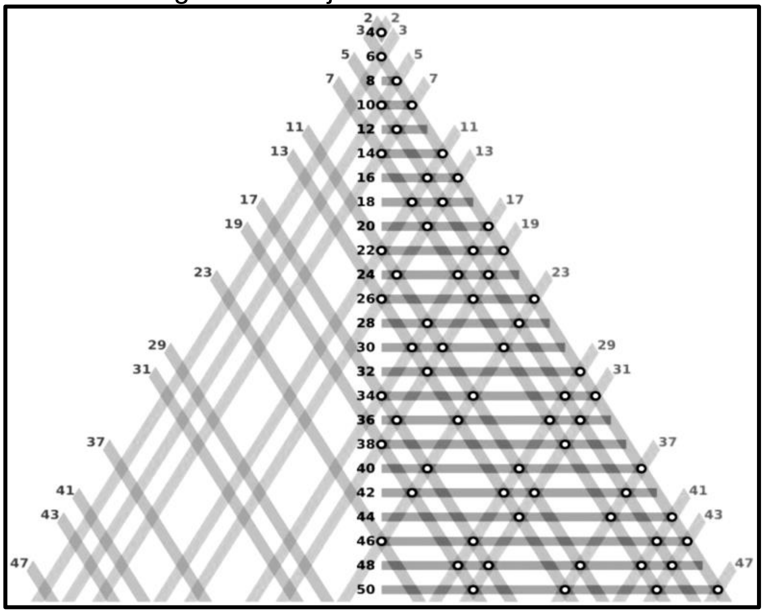
Na Idade Moderna, surge o monge Marin Mersenne (1588-1648) que, além de matemático, também ensinou filosofia e deu contribuições a física-matemática (mecânica); instrumentos musicais e acústica, particularmente, na Matemática é lembrado pelos *Números de Mersenne*, números que podem ser escritos no formato de $2^n - 1$, para algum inteiro n. Um resultado importante é que “se n não é primo, então $2^n - 1$ não é primo”. Sendo n primo, é fácil demostrar que $2^n - 1$ só pode ser primo se n for primo, porém, a sua recíproca não é verdadeira, visto que falha para $2^{11} - 1$.

Para verificar que $2^{11} – 1$ não é primo, faremos uso do seguinte teorema: Se $a = 2^n – 1$ é um número composto, então a possui um divisor primo p compreendido entre 1, isto é, $1 < p \leq (2n – 1)^{1/2}$. Dessa forma, temos que $2^{11} – 1 = 2.047$ e que $1 < p \leq (2.047)^{1/2} \approx 45,2437...$, ou seja, $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41\}$. Donde infere-se que $23 \mid 2.047$, ou seja, $2^{11} – 1$ é um número composto. Desse fato é possível concluir que nem todo número de Mersenne é primo, porém, há números de Mersenne que são primos (VIANA, 2019).

Contudo, existem métodos que são mais eficazes para testar a primalidade de 2^n-1 do que para outros números, e por isso, Mersenne possui o título de ter encontrado o maior primo de sua época. Todavia, tal recorde foi quebrado pelo profissional de T.I, Patrick Laroche de Ocala, participante do projeto de pesquisa mundial *Great Internet Mersenne Prime Search* (GIMPS), que descobriu o maior número primo conhecido até os dias atuais, conhecido como M82589933, tendo 24.862.048 dígitos, mais de 1,5 milhões do que o recorde anterior em 2017. Esse número pode ser expresso como $2^{82.589.933} – 1$, pertence à classe especial dos números primos raros, ocupando a 51º posição, e Laroche ficou conhecido como “O pai do M82589933” (GUSMÃO, 2019).

Destaca-se também o matemático prussiano Christian Goldbach (1690-1764) e o suíço Leonhard. Euler (1707-1783) que, segundo Marinho (2021), uma contribuição pertinente de Goaldbach é a famosa “conjectura de Goaldbach” que ao trocar correspondências (cartas) a Euler, em 7 de junho de 1742, escreveu que para todo número par maior que dois pode ser expresso como uma soma de dois números primos, a exemplo: 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 10 = 3 + 7 = 5 + 5. Essa conjectura foi testada até 400.000.000.000.000.000 e é conhecida como um dos problemas mais antigos que ainda não foi resolvido. Contudo, podemos fazer algumas afirmações tanto geométricas como algébricas. A primeira, descrevendo duas semirretas que contém apenas os números primos em “V”, conforme a figura a seguir, identificada na Parte V do livro Literatura e Matemática, vinculado ao Programa da União Europeia – ERASMUS+, Unidade 55, Guia do Professor, que trata no contexto da teoria dos números, os números pares e números primos.

Figura 1: Conjectura de Goaldbach.



Fonte: https://artofmaths.eu/wp-content/uploads/2020/10/PT_TOOL_55.pdf

Note que ao fazermos o cruzamento das semirretas de cada primo, a intercessão representa a soma dos dois primos, por exemplo, 7 + 5 = 12, e assim sucessivamente. A outra maneira que podemos representar é descrevendo-a de modo funcional como sendo $p + q = 2k$, com p e q $\in \mathbb{Z}$ e $2k \geq 4$ representando a forma de um número par. Logo podemos concluir que $p = 2k$ ou $p = 2k + 1$ e $q = 2k´$ ou $q = 2k´ + 1$, que resultam quatro possibilidades:

$$\begin{cases} (2k) + (2k´) = 2k´´ \\ (2k) + (2k´ + 1) = 2k´´ + 1 \\ (2k + 1) + (2k´) = 2k´´ + 1 \\ (2k + 1) + (2k´ + 1) = 2k´´ \end{cases}$$

Podemos concluir por exaustão que, a soma de dois números primos pares resulta um número par, que a soma de um número primo ímpar com um primo par resulta um número ímpar e que a soma de números primos ímpares resulta um número par. Note que na primeira conclusão há apenas uma possibilidade, pois, o único número primo positivo é o dois, e nessas condições, tem-se 2 + 2=4.

Outrossim, temos o matemático francês, Pierre de Fermat (1607-1665) que também contribuiu para a teoria dos números, em particular, ao estudo dos números primos, ao afirmar que os números da forma $2^{2^n} + 1$ são todos primos, neste caso, tem-se 3, 5, 17, 257 e 65537, denominados de números de Fermat, enunciado do seguinte modo em Filho (1981, p. 272): “Chama-se número de FERMAT todo inteiro positivo da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$, para $n \geq 0$”. Dessa definição, de acordo com Katz (2010 p. 580), “F_n é primo para todo inteiro *n* maior que zero. No entanto, Euler contrapõem Fermat em 1732 ao argumentar que 641 era um fator de $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$”.

Por fim, de acordo com Leite (1985), acredita-se que Fermat tivesse provado Fn divide $2^{Fn} - 2$ era condição necessária para ser um número primo, entretanto, não provou ser suficiente. Mais adiante, o matemático francês Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) apresenta em 1819 o primeiro contraexemplo de forma explicita, comprovando que 341 = 11 x 31 divide 2341 – 2, porém não é um número primo ademais, percebe-se que Euler antecipou em décadas a prova dada por Sarrus.

Por fim, o foco volta-se para a elaboração das atividades vinculadas ao texto produzido a partir dos recortes elencados. Apenas esses recortes devem proporcionar ao leitor os elementos necessários para resolução das atividades. As atividades apresentadas a seguir apontam a versatilidade do diagrama-metodológico proposto por Chaquiam (2022a.) em relação ao texto elaborado.

ATIVIDADES RELACIONADAS AO TEXTO

Tomando-se por base o texto acima, foram elaborados dois grupos contendo 3 atividades cada, o primeiro grupo está direcionado ao ensino básico e outro, relacionado ao ensino superior.

Ensino Básico

a) Verifique se 125 é um número primo ou composto a partir do Teorema Fundamental da Aritmética.

b) Para n = 150, utilize os dois métodos de Eratóstenes e compare os resultados.

c) Aplique a Conjectura de Goaldbach para escrever os números 18, 26, 30, 45 e 48.

Ensino Superior

a) Aplique a expressão de Mersenne para n = 7 e n = 9, em seguida, compare os resultados.

b) A partir da forma dada dos números de Fermat $2^{2^n} + 1$, para n ≥ 0:

  i) Explique o que ocorre para n = 0; n = 1; n = 2; n = 3 e n = 4.

  ii) Utilize o argumento apresentado por Euler para contrapor a conjectura de Fermat no caso: Se $641 \mid F_5$, então ele é composto.

c) A partir do argumento apresentado por Euler, explique por que 341 = 11 x 31 divide 2341 – 2 não é primo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao fazermos um apanhado histórico sobre um objeto matemático é possível acompanhar sua constituição e evolução ao longo, e, por isso, construir um conhecimento significativo a respeito do assunto. O diagrama-metodológico proposto por Chaquiam (2022a) nos possibilita obter uma visão global da temática desde os primórdios até os dias atuais.

O desenvolvimento da pesquisa e a elaboração do texto, além de cumprir seu principal objetivo, associar história da matemática aos conteúdos matemáticos, também foi fundamental para a consolidação de conceitos matemáticos vistos na graduação. De outro lado, a elaboração das atividades nos trouxe a possibilidade de integrar a matemática do passado com a do presente, principalmente com aquela constante nos livros didáticos.

Por fim, observou-se que recortes da história dos números primos não são tão explorados quanto outros assuntos de matemática, mas que apesar disso, entendemos que esses recortes históricos relacionados aos números primos podem aguçar a curiosidade do aluno e propiciar aprofundamento do saber.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard. **Teoria Elementar dos Números**. São Paulo: Nobel, 1981;

BENTLEY, Peter. **O livro dos números**: uma história ilustrada da Matemática. Rio de janeiro: Zahar, 1972;

CHAQUIAM, M. História e Matemática: um elo e quatro contextos. **Revista COCAR**, n. 14, Edição Especial – Dossiê Tendências de Educação Matemática; julho de 2022a. Disponível em https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/issue/view/185

CHAQUIAM, M. História e Matemática: dos contextos as atividades. Minicurso. **Anais da X Bienal da Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2022b. Disponível em: https://sbm.org.br/bienal/wp-content/uploads/sites/2/2022/09/Anais_da_X_Bienal_de_Mat.pdf. Acesso em: 10 ago. 2022

CHAQUIAM, M. História e Matemática Integradas por meio de um Diagrama Metodológico. **Revista PARADIGMA**, v. XLI, Nº Extra 1; abril de 2020 / 197-211. Disponível em http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/838/772. Acesso em 09 de ago. 2022.

CHAQUIAM, M. **Ensaios Temáticos**: História e Matemática em sala de aula. Belém: SBEM-PA, 2017. Disponível em https://paginas.uepa.br/ghemaz/. Acesso em 15 de mar. 2022.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: MENDES, I. A. & CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016, p. 77 - 125. Disponível em https://paginas.uepa.br/ghemaz/. Acesso em 15 de mar. 2022.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. Natal: Livraria da Física, 2015. Disponível em https://paginas.uepa.br/ghemaz/. Acesso em 15 de mar. 2022.

ERASMUS+, Programme of the Euripean Union. Tio Petrus e a Conjectura de Goldbch**. The art of Maths**. Parte V. Literatura e Matemática. Revisão: Associação brasileira de Matemátics. Disponível em: https://artofmaths.eu/wp-content/uploads/2020/10/PT_TOOL_55.pdf. Acesso em 03 de nov. 2022.

GUSMÃO, Gustavo. **Porque a descoberta do maior número primo da história importa?** Exame. São Paulo. 20 de jan. 2019. Disponível em: *https://exame.com/ciencia/por-que-a-descoberta-do-maior-numero-primo-da-historia-importa/*. Acesso em: 12 de dez. 2022;

KATZ, Victor J. **História da Matemática**. Tradução e Revisão Jorge Nuno Silva. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

LEITE, Paulo Ferreira. Números de Fermat. São Paulo: **Revista professor de Matemática**, 1985 N° 7-2° semestre pp. 23-25. Disponível em: *https://rpm.org.br/cdrpm/7/5.htm*

MARINHO, Adília. **Vida & Obra de Christian Goldbach**. Clube de Matemática. Sociedade Portuguesa de Matemática, 18 de mar. 2021. Disponível em: *https://www.todamateria.com.br/referencia-site-*

abnt/#:~:text=Para%20fazer%20refer%C3%AAncias%20de%20sites,%2C%20m%C3%AAs%20e%20ano)%22. Acesso em: 15 de dez. 2022;

MENDES, I. A. **Usos da História no Ensino da Matemática**: Reflexões Teóricas e Experiências. São Paulo: Livraria da Física. 2022.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016. . Disponível em https://paginas.uepa.br/ghemaz/. Acesso em 15 de mar. 2022.

ROQUE, T; CARVALHO, J B P. **Tópicos de História da Matemática** Rio de Janeiro: SBM, 2012

VIANA, Marcelo. *Números primos de Mersenne, visando o infinito*. **Folha de São Paulo**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Disponível em: *https://impa.br/noticias/numeros-primos-de-mersenne-visando-o-infinito/*. Acesso em: 15 de dez. 2022.