



ALGUNS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS MOBILIZADOS NO ESTUDO DA CONSTRUÇÃO DE CORPOS REGULARES SEGUNDO O TRATADO *DE DIVINA PROPORTIONE* DE LUCA PACIOLI

Alison Sousa da Silva ¹

Adriana Nogueira de Oliveira ²

RESUMO

No contexto histórico do ensino de Matemática, a Geometria é um conteúdo que poderia ter maior destaque nos diferentes níveis educacionais. A fim de propiciar isso, estudos vem sendo desenvolvidos partindo da relação entre diversos campos do saber. Especificamente para os conhecimentos matemáticos que envolvem os corpos regulares, a utilização da fonte histórica *De Divina Proportione*, tratado redigido pelo frade italiano Luca Pacioli (1447-1517) durante o período renascentista, é uma opção que traz contribuições significativas. O presente estudo trata de um recorte de uma pesquisa de mestrado realizada sobre os capítulos XXV a XXVIII do referido tratado e tem por objetivo apresentar os resultados do estudo realizado, trazendo algumas reflexões didáticas que emergem dos escritos de Pacioli no que se refere ao conceito de corpos regulares e à construção de alguns deles. A partir disso, percebemos que o conteúdo do tratado *De Divina Proportione* pode ser fonte de diversas discussões potencialmente didáticas relacionadas à construção do conhecimento de corpos regulares, representando uma possibilidade de ressignificar conhecimentos.

Palavras-chave: De Divina Proportione. Ensino de Geometria. Corpos regulares.

INTRODUÇÃO

Ao longo da história, o ensino de Geometria no Brasil enfrentou momentos de ascensão e queda advindos de aspectos sociais, políticos e econômicos, trazendo implicações à formação de professores de Matemática no que se refere aos conhecimentos geométricos. Conforme apresentam Caldato e Pavanello (2015), esse processo se estendeu até meados dos anos 1990, mas ainda pode ser percebido na atualidade.

¹ Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Docente da Secretaria da Educação do Estado do Ceará (SEDUC-CE). alisonsilva1803@gmail.com.

² Mestra em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE). Doutoranda em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE). nogueira.oliveira@aluno.uece.br.



A fim de sanar essas questões, faz-se necessário proporcionar métodos que possibilitem auxiliar o ensino de Matemática trazendo significado aos conceitos abordados. Esta mobilização vem sendo realizada há vários anos, culminando no desenvolvimento de estudos que visam a articulação entre o ensino e outros campos do saber, dos quais a história da matemática tem recebido destaque, inclusive nos documentos oficiais que norteiam os diferentes níveis de ensino (BRASIL, 1996, 2001, 2018).

Dentre as fontes históricas que envolvem conhecimentos geométricos, o tratado *De Divina Proportione*, do frade italiano Luca Pacioli (1447-1517), possibilita esta articulação, de modo que seu estudo vislumbra, em meio aos assuntos abordados, contribuir para o ensino de corpos regulares na atualidade. A partir desse tratado, realizamos um estudo ao longo do Curso de Pós-Graduação Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, com o intuito de compreender as contribuições do ensino de corpos regulares para a formação de professores de Matemática por meio do tratado *De Divina Proportione* de Luca Pacioli através da construção de uma interface entre história e ensino de matemática segundo uma vertente historiográfica atualizada.

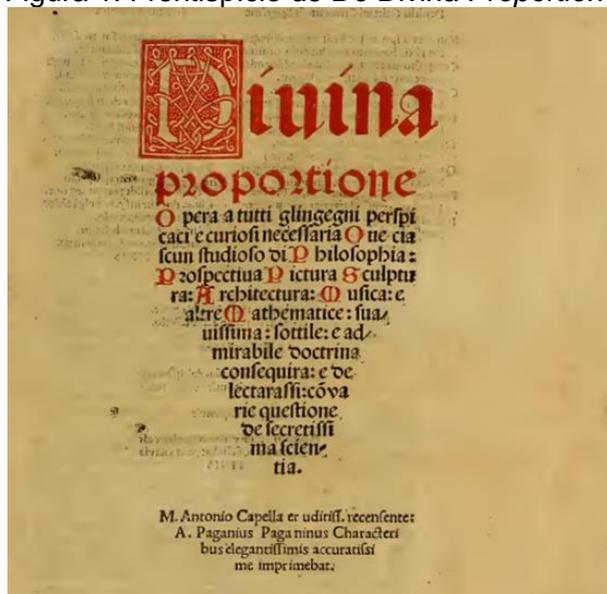
Desse modo, o presente estudo tem por objetivo apresentar os resultados da pesquisa realizada, que culminou em uma dissertação defendida em 2021, realizada em caráter bibliográfico e documental (PRODANOV; FREITAS, 2013). Nela, apresentamos reflexões que, quando inseridas no desenvolvimento das atividades elaboradas segundo orienta a interface entre história e ensino de Matemática, podem trazer contribuições à compreensão dos corpos regulares e, conseqüentemente, à formação de professores de Matemática.

SOBRE O TRATADO *DE DIVINA PROPORZIONE*, DE LUCA PACIOLI

Em linhas gerais, o tratado *De Divina Proportione*, redigido pelo frade italiano Luca Pacioli durante o período do Renascimento, é composto por 71 capítulos que versam sobre a chamada “divina proporção”, perpassando por

tópicos que envolvem a filosofia platônica e a arquitetura, interrelacionados com os conhecimentos matemáticos da época. Sua primeira versão, datada de 1498, foi dedicada ao então duque de Milão, Ludovico Sforza (1452-1508), a quem Pacioli prestava serviços. Anos depois, em 1509 (Figura 1), coube a Paganino e Alessandro Paganini a produção da primeira versão impressa do tratado (BERTATO, 2010; DI TEODORO, 2014; NUOVO, 2014).

Figura 1: Frontispício de *De Divina Proportione*



Fonte: Pacioli (1509, frontispício).

Entre os capítulos XXIV e XLVI, Pacioli direciona seus escritos aos cinco corpos regulares (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro). Tendo os escritos de Euclides (2009) em *Os elementos* como inspiração, o frade apresenta os referidos corpos, descrevendo as condições para a existência de cada um, as construções individuais a partir do diâmetro de uma esfera e, também, das inscrições de uns nos outros, cuja justificativa para a existência de apenas 12 casos de inscrição é encontrada no último capítulo do trecho.

Para a realização do estudo principal, nos limitamos aos capítulos XXV, que versa sobre o conceito de corpos regulares descrito por Pacioli e apresenta as razões para a existência de apenas cinco desses corpos, e XXVI a XXVIII, que tratam das construções do tetraedro, do octaedro e do cubo. Como fonte de pesquisa, utilizamos a versão traduzida para o português, datada de 2010,



correspondente ao cotejamento entre o manuscrito de 1498 e a versão impressa de 1509.

DISCUSSÕES DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA A PARTIR DO ESTUDO REALIZADO

Tendo como referência as propostas de Saito e Dias (2013), Dias e Saito (2014), Pereira e Saito (2019), entre outros, sobre a articulação entre história e ensino de Matemática pautada em uma historiografia atualizada, nos dedicamos à análise do tratado *De Divina Proportione* a fim de possibilitar a construção de uma interface sem um instrumento matemático, diferente de outros estudos realizados até então. Para isso, nos baseamos nas construções e representações dos corpos regulares incorporados no tratado, apresentados pelo frade nos capítulos XXV a XXVIII.

As discussões advindas da pesquisa de Silva (2021b) foram divididas em dois grupos: sobre o conceito de corpos regulares presente no capítulo XXV, e sobre as construções destes corpos nos capítulos XXVI a XXVIII. Esta divisão foi assim organizada em razão das percepções do pesquisador ao longo do estudo e pela temática abordada nos capítulos referenciados.

No que se refere ao conceito de corpos regulares apresentado por Pacioli (2010), observamos como aspectos relevantes a nomenclatura utilizada pelo frade no texto, o conceito propriamente dito, e a forma como as medidas dos ângulos das faces dos corpos são apresentadas.

Em relação à nomenclatura, é cabível uma reflexão sobre o que é um “sólido”, como muito se menciona no ensino de Geometria Espacial, uma vez que, em *De Divina Proportione*, os corpos são apresentados em duas variações (“*solidus*” e “*vacuus*”). Tendo *Os elementos* de Euclides como referência, seria um equívoco chamar tais corpos de “sólidos”, pois os entes empregados no processo de construção deles, “linhas”, como descreve Pacioli (2010), não possuem espessura e apenas delimitam a superfície que os determina. Entretanto, no ensino de Geometria essa nomenclatura tem sido utilizada nos diferentes níveis da educação.



Sobre o conceito de corpos regulares apresentado no tratado, concordamos com Silva (2021a) ao afirmar que em relação aos livros didáticos, a maioria deles trata desse conceito segundo uma forma distinta da citada pelo frade. Segundo Pacioli (2010, p. 28), corpos regulares são

[...] aqueles cujas bases são iguais entre si e de ângulos sólidos e planos iguais e, semelhantemente, de lados iguais. Assim se apresenta, pois para a construção de cada ângulo sólido é necessário ao menos o concurso de três ângulos superficiais, porque um ângulo sólido não pode ser determinado somente por dois ângulos superficiais.

Segundo Silva (2021a, p. 11), a maioria dos livros didáticos indicados no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) para o triênio 2018-2020 tratam do conceito de corpos regulares fazendo menção à congruência de lados e ângulos, e à relação de Euler. Isso também é observado nos livros que tradicionalmente são adotados nos cursos de licenciatura em Matemática. Tal observação se deve ao fato de que os estudos de Euler são cerca de 200 anos mais recentes que os de Pacioli, e que as características costumeiramente relacionadas ao conceito de corpos regulares não são essenciais aos olhos do frade.

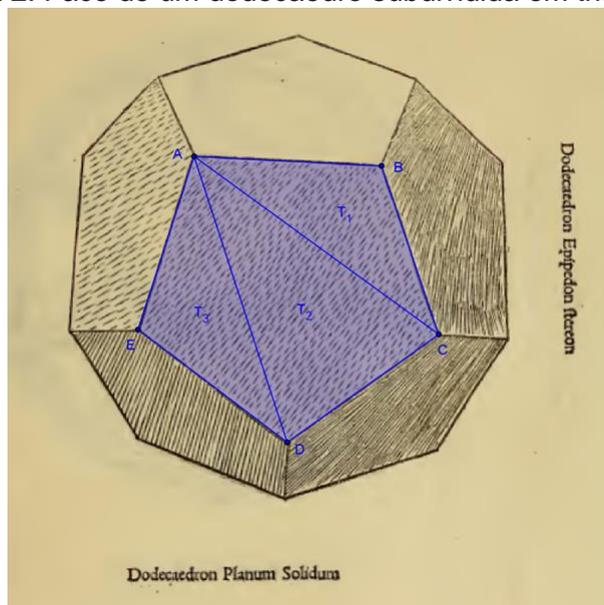
Quanto às medidas dos ângulos das bases dos corpos regulares, Pacioli (2010) não determina essas medidas de maneira específica, mas, baseado na 32ª proposição presente no livro I³ de *Os elementos*, dá indícios de uma relação com a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, a qual ele se refere como igual a dois retos.

Tradicionalmente, no ensino de Geometria, adotamos o grau como unidade de medida, de modo que a referida soma totaliza 360°. Sabendo que o ângulo reto, ao ser medido utilizando esta unidade, tem 90°, uma primeira leitura do capítulo XXV pode causar estranheza. Entretanto, já que a aplicação do grau como unidade de medida não é pertinente ao momento histórico em que o tratado *De Divina Proportione* foi concebido, percebemos que a partir da relação estabelecida por Euclides (2009) e indicada por Pacioli (2010), há a possibilidade

³ “Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos” (EUCLIDES, 2009, p. 122).

de se discutir sobre proporção nos os ângulos retos e a subdivisão de cada polígono em triângulos, como se vê na figura 2.

Figura 2: Face de um dodecaedro subdividida em triângulos



Fonte: Adaptado de Pacioli (1509, s/p).

Conforme se observa no exemplo, isto é, a face pentagonal de um dodecaedro regular, a partir das concepções de Pacioli (2010) apresentadas no capítulo XXV, o leitor pode refletir sobre uma maneira de justificar a possibilidade de construção de um ângulo sólido a partir desse tipo de polígono decompondo-o em três triângulos a partir de um mesmo vértice, tendo como referência apenas o que Pacioli (2010) descreve em seu tratado, isto é, a 32ª proposição do livro I de *Os elementos*.

Dentre os aspectos pontuados no segundo grupo de discussões, sobre as construções dos corpos regulares nos capítulos XXVI a XXVIII, destacamos o “saber-fazer” do leitor ao estudar os referidos capítulos do tratado, os conhecimentos mobilizados na construção do semicírculo ADB presente em cada capítulo, e as relações entre as medidas das arestas dos corpos regulares e o diâmetro da esfera onde se deseja inseri-los observadas por meio da semelhança de triângulos.

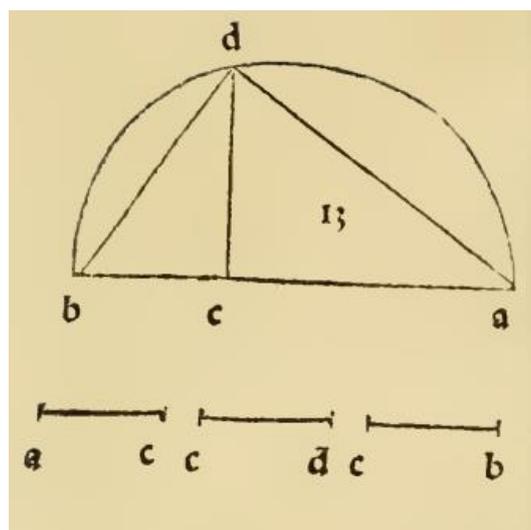
Conforme explicitado no início deste estudo, *De Divina Proportione* é um tratado do período do Renascimento, momento histórico em que a aproximação

entre a prática dos artesãos e a teoria dos eruditos era uma realidade e que era comum destinar os tratados a um público específico, de acordo com seu ofício. No frontispício do tratado, Pacioli (2010, frontispício) cita que seu tratado se destina a “[...] todo estudioso de Filosofia, Perspectiva, Pintura, Escultura, Arquitetura, Música e outras disciplinas Matemáticas”, possíveis leitores cujos ofícios possuem relação com conhecimentos geométricos, de modo que, segundo Beltran, Saito e Trindade (2014), na articulação entre o saber e o fazer era desenvolvido um conhecimento.

Na leitura dos capítulos XXVI, XXVII e XXVIII de *De Divina Proportione*, Pacioli (2010) dá indícios de que a expertise do leitor sobre a temática apresentada é necessária, de modo que ele indica *Os elementos* como suporte para seu tratado. No Renascimento, isso poderia ser uma prática comum ao leitor, pois o “saber-fazer” geométrico da época era essencialmente fundamentado nos escritos de Euclides. Entretanto, trazendo para o momento presente, os conhecimentos envolvidos não são sistematizados para esse processo ao longo de nossa formação, cabendo-nos buscar referências segundo o contexto no qual Luca Pacioli redigiu seu tratado, a fim de suprir esse “saber-fazer” que nos falta.

Sobre a construção do semicírculo ADB (Figura 3), presente nos capítulos XXVI a XXVIII, a necessidade desse “saber-fazer” é percebida para se cumprir seu processo de construção.

Figura 3: Semicírculo ADB apresentado no capítulo XXVI



Fonte: Pacioli (1509, pars 8).

Apesar da riqueza de detalhes na descrição de Pacioli (2010) em seus escritos, percebemos que o caminho necessário para se construir tal figura é suprimido, de modo que o leitor deve ser responsável por obter os conhecimentos necessários para esse processo de construção. Desse modo, o leitor mobiliza uma série de conhecimentos que podem ser relacionados a habilidades descritas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), vinculadas à relação entre ângulos formados pela concorrência entre retas paralelas e uma transversal e à construção de ângulos, polígonos e outros elementos geométricos, de modo que é possível compreender estes conhecimentos matemáticos através de uma prática direcionada.

Por fim, na relação entre a medida da aresta dos corpos regulares e o diâmetro da esfera utilizada como referência para sua construção, apesar de não haver uma justificativa explícita para tais relações percebemos uma possibilidade para mobilizar conhecimentos referentes à semelhança de triângulos.

Em relação à semelhança entre os triângulos ABD, ACD e BCD, formados no semicírculo ADB nas construções descritas, percebemos que isso pode levar às relações métricas no triângulo retângulo, conteúdo de Geometria lecionado na educação básica geralmente através da simples indicação de fórmulas prontas sem qualquer demonstração, o que não agrega significado aos alunos. Já sobre às relações entre o diâmetro da esfera base e as arestas que delimitam os corpos, estas se dão pela análise da construção dos corpos



regulares em relação aos triângulos do semicírculo ADB, pois estas “linhas” são utilizadas como referências para o cumprimento dos passos que culminam na obtenção de um corpo regular.

Na compreensão dessas relações, podem ser mobilizadas outras habilidades da BNCC, que se referem às condições de semelhança entre triângulos, a demonstração dessas relações a partir da semelhança e o reconhecimento de vistas ortogonais em objetos em perspectiva. As duas primeiras, diretamente relacionadas ao estudo dos triângulos do semicírculo ADB e a última, mobilizada na observação do processo de construção do corpo regular e de sua representação final em três dimensões.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através do estudo realizado, tendo como base os preceitos da interface entre história e ensino de Matemática, percebemos que o tratado *De Divina Proportione* possui potencial para ressignificar conceitos matemáticos relacionados à Geometria, especialmente no que se refere ao ensino dos corpos regulares.

Nas discussões levantadas a partir da análise dos capítulos XXV a XXVIII, que versam desde o conceito de corpos regulares segundo Luca Pacioli até a construção dos três primeiros corpos (tetraedro, octaedro e cubo, respectivamente), vemos que os aspectos ultrapassam os conhecimentos matemáticos propriamente ditos. Há considerações relevantes sobre a forma como professores de Matemática têm conduzido suas aulas no que concerne aos conteúdos aqui abordados, as quais, se permitida a sua incorporação, pode possibilitar uma compreensão diferenciada por parte do alunado, pois a abordagem de Pacioli em seu tratado provoca a reflexão sobre seus escritos.

A fim de dar continuidade ao estudo iniciado no mestrado, pretendemos dar continuidade à construção dos demais corpos regulares com o intuito de investigar se há mais discussões relevantes acerca da temática abordada de modo que estas tragam novas contribuições ao ensino de Geometria, tanto na educação básica quanto na formação inicial de professores de Matemática.



REFERÊNCIAS

- BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. **História da Ciência para formação de professores**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2014.
- BERTATO, F. M.. **A "De Divina Proportione" de Luca Pacioli**: tradução anotada e comentada. Campinas: Unicamp, 2010. 56 v. Coleção CLE.
- BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, 05 mar. 2002, Seção 1, p. 15. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 1 nov. 2019.
- BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, 23 dez. 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 1 nov. 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília: MEC, 2018.
- CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M.. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, Lisboa, v. 24, n. 1, p. 103-128, jun. 2015. Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/article/view/22913>. Acesso em: 01 jan. 2021.
- DI TEODORO, F. P.. **PACIOLI, Luca**. 2014. Dicionario Biografico degli Italiani. Disponível em: [http://www.treccani.it/enciclopedia/luca-pacioli_\(Dizionario-Biografico\)](http://www.treccani.it/enciclopedia/luca-pacioli_(Dizionario-Biografico)). Acesso em: 01 nov. 2019.
- DIAS, M. da S.; SAITO, F.. Algumas potencialidades didáticas do “setor trigonal” na interface entre história e ensino de Matemática Some didactic potential of “trigonal sector” at the interface between history and mathematic teaching. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 16, n. 4, p. 1227-1253, 2014.
- EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: Unesp, 2009. Tradução e introdução de Irineu Bicudo.
- NUOVO, A.. **PAGANINI, Paganino**. 2014. Dicionario Biografico degli Italiani. Disponível em: http://www.treccani.it/enciclopedia/paganino-paganini_%28Dizionario-Biografico%29. Acesso em: 01 nov. 2019.
- PACIOLI, L.. De Divina Proportione. In: BERTATO, F. M.. **A "De Divina Proportione" de Luca Pacioli**: tradução anotada e comentada. Campinas: Unicamp, 2010. 56 v. Coleção CLE. p. 1-109.
- PACIOLI, L.. **De Divina Proportione**. Veneza: A. Paganius Paganinus, 1509.



PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F.. A reconstrução do báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **COCAR**, Belém, v. 13, n. 25, p.342-373, abr. 2019.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SAITO, F.; DIAS, M. da S.. Interface entre História da Matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, v.19, no1, p. 89-111, 2013.

SILVA, A. S. da. O conceito de corpos regulares em alguns livros didáticos e sua relação com o tratado De Divina Proportione (1509). **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 7, n. 20, p. 190–201, 2021a. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2968>. Acesso em: 01 jan. 2021.

SILVA, A. S. da. **Sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no estudo de corpos regulares segundo o tratado De Divina Proportione de Luca Pacioli**. 2021. 95 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2021b.