



DAVID HILBERT: um breve panorama acerca de suas produções acadêmicas em Matemática e Física (1885-1930)

Daniel Felipe Neves Martins¹

Magno Luiz Ferreira²

Leandro Silva Dias³

RESUMO

RESUMO

Estudantes de Matemática e matemáticos profissionais esbarram a todo instante em teoremas importantes que levam o nome de David Hilbert, sobretudo, em Análise Funcional. Porém, sua produção acadêmica abrange outras áreas do conhecimento matemático com resultados importantes em Teoria dos Números, Teoria dos Invariantes Algébricos, Fundamentos da Geometria, Teoria das Equações Integrais, Fundamentos da Matemática e Fundamentos da Física. É um longo período de atuação, entre 1885 e 1930, em que David Hilbert oferece à comunidade acadêmica, individualmente ou em parceria com inúmeros colegas, resultados extremamente relevantes e complexos, além de sua rica e tradicional produção em Análise Funcional. Este trabalho, baseado nos apontamentos de Dieudonné (1939), Reid (1970), Gray (2000), Cassous-Noguès (2004) e Weyl (1944), tem como intenção apresentar de maneira breve a abrangência da produção matemática de David Hilbert cujo rigor matemático e criatividade o caracterizam como um dos maiores formalistas do seu campo de conhecimento e ação e não somente um analista.

Palavras-chave: David Hilbert. Produções Acadêmicas. História da Matemática Alemã.

INTRODUÇÃO

Após algumas pesquisas e leituras, ousamos dizer que há um terno de palavras que pode ser usado para descrever os trabalhos acadêmicos de David Hilbert (1862-1943) em todos os campos da Matemática em que atuou: clareza, aprofundamento e rigor. *Clareza* por ter apresentado à comunidade acadêmica resultados de extrema relevância, muito bem redigidos e fundamentados com

¹ dfnmartins@yahoo.com

²

³ leandro.dias@ifrj.br



base na lógica formal clássica. *Aprofundamento* por não se contentar somente com o problema proposto e sim com os possíveis desdobramentos que os resultados alcançados poderiam atingir, permitindo a realização de conexões entre diferentes campos da Matemática. Por fim, *rigor*, baseado na própria necessidade de construir suas matemáticas sob a égide de modelos estruturais completos, a fim de afastar das teorias matemáticas as inconsistências e as contradições internas. Hilbert nos apresenta demonstrações claras e elegantes do ponto de vista da escrita rigorosa da Matemática, como podemos observar na obra *Grundlagen der Geometrie*, de 1889.

Sua percepção mais abrangente, destreza e intimidade com os diversos ramos da Matemática combinam com seu estado permanente de lucidez em *enxergar conexões múltiplas* com um dado assunto. Reid (1970) conta que Hilbert ao construir seus resultados, procurava sempre uma melhor estética para suas demonstrações e não era conciso em suas escritas nem em suas explicações. Lançava-se. Criava, sugeria, propunha desafios e solucionava o mesmo problema de variadas maneiras. Hilbert influenciou muitos matemáticos de sua geração como Minkowsky (1864-1909), Ackermann (1896-1962), Weyl (1885-1955) e os tantos outros que o sucederam, tendo sido um grande incentivador da resolução de problemas. Para Hilbert, a Matemática precisa de problemas para sempre existir e para fortalecer os espíritos dos matemáticos.

Para lograr êxito, sobretudo nas questões que não seriam resolvidas facilmente em seu tempo, Hilbert entendia que o matemático precisava entender a Matemática como um grande bloco e não de forma segmentada. Para ele, a compreensão da unidade metodológica da Matemática se fazia necessária, para se que, se pudesse 'fazer matemática'. Isso não era somente uma crença, era resultado de sua experiência como matemático que raramente buscava algoritmos já desenvolvidos para resolver problemas de uma dada categoria, mas, que os atacava em suas simplicidades originais, como afirma Weyl (1944).

“Uma característica do método de Hilbert é um ataque peculiarmente direto aos problemas, livre de algoritmos; ele sempre volta às questões em sua simplicidade original. Um exemplo notável é o resgate do princípio de



Dirichlet, que havia vítima das críticas de Weierstrass, mas seu trabalho é rico em exemplos semelhantes. Sua força, igualmente desdenhosa da convulsão de esforços hercúleos e de truques e artimanhas surpreendentes, combina-se com uma pureza intransigente.” (WEYL, 1944, p. 617)

Reid (1970) conta que a dedicação de Hilbert à Matemática é reconhecida em todos os círculos de matemáticos, sendo atribuído a ele, assim como a Henri Poincaré, o título de universalista. A qualidade lógico-formal das demonstrações contidas em seus textos é indiscutível, mas muitos deles foram tão amplamente divulgados à época, talvez pela dificuldade da compreensão da língua alemã e a não publicação de suas obras em outras línguas, como o francês ou o italiano.

Este trabalho apresenta uma parte da diversidade da produção plural de David Hilbert, no recorte temporal (1885-1930), por ser possível identificar claramente neste período que suas produções acadêmicas vão para além dos estudos formais em Análise Funcional ou em Teoria dos Invariantes, como normalmente é conhecido no Brasil.

Analisando a produção de Hilbert e divulgando seus conteúdos à comunidade acadêmica de historiadores da matemática, estudantes de matemática e professores de matemática acreditamos que estas linhas podem contribuir para: (1) o reconhecimento do alcance matemático de sua obra, (2) da sua importância de seus resultados para o desenvolvimento ‘das Matemáticas’ a partir da segunda metade do século XIX, (3) da percepção de sua influência como eminente matemático a partir de suas parcerias com outros matemáticos, e (4) da compreensão do porquê Hilbert é reconhecido como o grande representante do formalismo alemão.

Das produções acadêmicas de destaque de David Hilbert

Hilbert contribuiu com três obras completas importantes para a literatura Matemática e que merecem atenção especial:



(1) **Gesammelle Abhandlungen**. *Ensaio Formais* é uma coletânea de artigos publicados em três volumes por J. Springer, em Berlim, durante os anos de 1932 e 1935. A edição de 1935 contém o famoso **Zahlbericht**.⁴

Shokranian (2010) nos conta que no ano de 1896, durante o 1º encontro da Deutsche Mathematiker-Vereinigung⁵ (Sociedade Matemática Alemã), Hilbert e Minkowski foram convidados para escrever um relatório completo sobre a situação da teoria dos números naquele tempo, num período máximo de dois anos. Hilbert ficou responsável por escrever sobre a teoria algébrica dos números e Minkowski sobre a teoria clássica dos números. Quase no final da data limite para entrega do trabalho, Minkowski nada tinha produzido, mas Hilbert já estava quase terminando a sua parte. Minkowski abandona o projeto e Hilbert o termina sozinho. *Zahlbericht*, como foi intitulado, ficou muito bem escrito. Não se mostrou como um simples relatório, mas como um livro completo sobre a situação da teoria dos números da época.

(2) **Grundlagen der Geometrie**. Publicado em 1899, *Fundamentos da Geometria*, faz uma apresentação rigorosa de uma axiomática adequada ao desenvolvimento lógico-dedutivo da geometria euclidiana e discute pontos importantes em relação às novas geometrias emergentes.

⁴ Em “*David Hilbert and his mathematical work*”, Hermann Weyl conta que foi estudar em Göttingen após receber do diretor de seu colégio uma carta de recomendação. Descreve que ficou extremamente contente ao ver anunciado que Hilbert daria um curso sobre *a noção de número e a quadratura do círculo*. Weyl diz que um novo mundo se descortinou a sua frente e que saiu da aula de Hilbert com o *Zahlbericht* debaixo dos braços e que o “devorou” durante todo o verão, compreendendo todo o texto, mesmo sem nenhum conhecimento prévio de teoria dos números, tão pouco da Teoria de Galois. Isto nos faz acreditar na clareza e na objetividade do texto de Hilbert.

⁵ Desde 1870 havia uma vontade coletiva de criar a Sociedade Matemática Alemã, mas somente em 1890 a Deutsche Mathematiker-Vereinigung foi criada, tendo Georg Cantor, como o seu primeiro presidente. A criação desta sociedade refletiu uma tendência internacional de criar sociedades e jornais especializados em Matemática. Esta foi uma característica muito especial da escola matemática alemã: a criação de jornais especializados, como o *Jahrsbericht den Deutschen mathematiker Vereinigung*. A partir do ano de 1896 a Deutsche Mathematiker-Vereinigung, ficou responsável por organizar congressos internacionais de Matemática a cada quatro anos. O primeiro ocorreu em Zurich e o famoso 2º congresso de 1900, ocorreu em Paris. Em 1900, Hilbert já era um matemático de muito prestígio nos círculos acadêmicos da Matemática.



(3) ***Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.***

Publicado em 1912, *Esboço de uma teoria geral das Equações Integrais*, foi reeditado em 1992 pela Cornell University Library, na série Library Digital Collections. Cremos que, por ocasião do 80º aniversário da obra. Encontramos em Weyl (1944) a informação de que nesta coletânea de artigos de Hilbert há resultados importantes de B. L. Van der Waerden, H. Hasse, A. Schmidt, Paul Bernays e E. Hellinger e que tais resultados exemplificam os diferentes caminhos que as pesquisas de Hilbert ofereceram aos matemáticos da época.

Destacamos também livros escritos com amigos matemáticos.

(4) ***Grünzüge der theoretischen Logik. Fundamentos Teóricos da Lógica ou***

Princípios de Lógica Matemática foi publicado em 1928 com a coautoria de Wilhelm Ackermann. É conhecido por ser o primeiro texto elementar que apresenta de maneira clara o que hoje conhecemos por lógica de primeira ordem. Os autores formalizaram o cálculo de primeira ordem e contribuíram diretamente para a compreensão dos trabalhos sobre aritmética de Peano, principalmente aqueles relativos à teoria axiomática dos conjuntos, resolução dos problemas de tomada de decisão (*Entscheidungsproblem*) e em problemas de álgebra relacional. A edição americana de 1950, tradução da 2ª edição alemã de 1938, é tida por especialistas como a melhor das edições do famoso e clássico texto de Hilbert.

(5) ***Methoden der mathematischen Physik. Métodos de Física Matemática*** é

uma obra com cerca de mil páginas e foi publicada em parceria com Richard Courant (1888-1972) em 1924, em dois volumes. Este livro apresenta um tratamento global dos métodos existentes em física matemática da época, sendo o segundo tomo inteiramente dedicado às equações diferenciais parciais. O texto traz o propedêutico do método de elementos finitos, no qual Courant se dedicou futuramente. A origem primária do texto é um conjunto de notas de aulas de Hilbert. A segunda edição do volume 1 foi publicada em 1931. Esta nova edição se difere da primeira por haver questionamentos sobre o cerne da física teórica da época: a teoria quântica. O volume 2 foi reeditado em 1937 e as técnicas de



Hilbert e Courant foram impactantes em direção à nova mecânica ondulatória. Houve uma terceira edição alemã em 1968 e a versão americana do volume 1, de 1956 foi revisada pessoalmente por Courant. Alunos e professores do Institut Courant de Matemática da New York University trabalharam arduamente na revisão do volume 2, o que garantiu rapidamente ao texto a reputação de *texto clássico* em física matemática.

(6) ***Anschauliche Geometrie*** É um texto produzido em parceria com Stephan Cohn-Vossen (1902-1936). Foi publicado em 1932 por Julius Springer (1817-1877), em Berlin. A edição americana é a mais difundida, desde a sua tradução do alemão. A obra ficou mundialmente conhecida após a sua tradução para o inglês sob o título em inglês *Geometry and Imagination*. No prefácio, Hilbert diz que um dos intuítos dos autores é apresentar a geometria de forma visual e intuitiva. Ele mostra a sua preocupação com o rumo que o estudo da geometria estava tomando e caracterizou logo no primeiro parágrafo da introdução, as duas grandes tendências que caracterizavam o ensino da geometria na época: os que valorizavam o abstracionismo e a dureza de um estudo da geometria pautado na lógica e os que valorizavam o intuicionismo, sem formalidades. No corpo do texto há espaço para a geometria euclidiana, geometria diferencial, geometria riemaniana, geometria algébrica e topologia, entre outros assuntos correlatos. Quando necessário, para justificar alguns resultados, Hilbert recorre à teoria dos números. Para muitos matemáticos o livro é a síntese de uma explosão de ideias de Hilbert e permanece atual. Foi usado como texto em cursos de graduação em universidades americanas por mais de cinquenta anos e como bibliografia oficial de muitas disciplinas em diversas universidades devido a sua abrangência, elegância e clareza textual. No nosso entender, o livro é de uma beleza ímpar, porém longe de ser uma leitura fácil. Muitas provas são apoiadas na habilidade de Hilbert em trabalhar com conjuntos de cardinalidade infinita. Nesta obra, Hilbert aplica a sua *estratégia* de fazer Matemática: dá um caráter formal ao intuicionismo, conduzindo ao leitor à compreensão do resultado apresentado, sem expô-lo à dureza da demonstração matemática em si, até porque muitas delas têm suas bases na análise real ou até mesmo na análise complexa. Há



muitos encaminhamentos para a compreensão de esboços das demonstrações formais, aparecendo várias vezes, ao longo do texto, a frase “*we would use analysis to show...*”

(7) **Grundlagen der Mathematik.** *Fundamentos da Matemática* é originalmente composto por dois volumes. O volume 1 foi publicado em 1934 e o volume 2 em 1939, ambos em parceria de Paul Bernays (1888-1977). A obra descreve uma nova abordagem dada por Hilbert e Bernays acerca dos Fundamentos da Matemática, introduzindo a aritmética de segunda ordem. Nos estudos de lógica matemática, a aritmética de segunda ordem é uma extensão da lógica (aritmética) de primeira ordem, que é uma extensão da lógica proposicional. Dizemos que a lógica de segunda ordem é extensão da lógica de primeira ordem devido à adição de variáveis e quantificadores sobre variáveis ou conjuntos ou até mesmo funções. O símbolo desta lógica, introduzido por Hilbert é Z_2 . A lógica ou aritmética de segunda ordem é uma coleção de sistemas axiomáticos que formalizam o conjunto dos números naturais e seus subconjuntos. É uma alternativa à abordagem axiomática da teoria dos conjuntos para uma grande parte dos ramos da Matemática, mas não para toda a Matemática. Hilbert lança mão desta aritmética de segunda ordem para formalizar a Matemática devido à natureza do conjunto dos números reais \mathbb{R} , infinito e não enumerável. Através dela é possível escrever *sistemas formais que trabalham com domínios finitos* (toda função injetora de domínio nele mesmo é sobrejetora) ou *domínios de cardinalidade enumerável* (possibilidade de construção de bijeções entre conjuntos infinitos com domínios em \mathbb{N}). A sintaxe da lógica de segunda ordem diz quais expressões são *fórmulas bem formadas*.

Nesta obra, Hilbert se ocupa com duas questões: a formalização das teorias matemáticas e a demonstração da não contradição (ou da consistência) das teorias formalizadas.



Períodos e produções associadas

Apesar dos trabalhos de David Hilbert perpassarem por diferentes ramos da Matemática e da Física-Matemática, em diferentes momentos, não há datas que marquem precisamente o início ou o fim de um período, sendo que muitos de seus trabalhos têm início num período e fim em outro por necessidade de melhorias na apresentação das demonstrações ou mesmo de inserção de novos apontamentos. O que aqui faremos é destacar, segundo Weyil (1944), para efeitos didáticos e de compreensão historiográfica da História da Matemática, seis grandes blocos de produções acadêmicas mais intensas entre o fim do século XIX e o início do século XX. Associando a eles, há datas que estão ligadas a um determinado evento, artigo publicado, livro lançado ou problema resolvido. Eis os períodos e as áreas de interesse de David Hilbert em cada um deles:

1º período: de 1885 a 1893 – Teoria dos Invariantes;

2º período: de 1893 a 1898 – Teoria dos Números Algébricos;

3º período: de 1898 a 1902 – Fundamentos da Geometria;

4º período: de 1902 a 1912 - Teoria das Equações Integrais e Análise Funcional;

5º período: de 1910 a 1922 - Física

6º período: de 1922 a 1930 – Fundamentos da Matemática.

A quase totalidade de fontes primárias sobre os trabalhos de Hilbert encontra-se na Alemanha. Segundo Toepell (1986), os manuscritos dos planos de aula de Hilbert ainda existem. Em 1967 todo o material que estava sob a guarda do Instituto de Matemática da Universidade de Göttingen foi doado para a Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek. Todo o acervo foi catalogado e hoje os materiais nele contidos estão liberados à consulta pública. O catálogo da biblioteca da universidade conta com 741 ítems. Na rica coleção há cerca de 500 correspondências e mais de 50 manuscritos dos apontamentos



das aulas. Há também notas de palestras e cursos ministrados por Hilbert em diversos períodos e em diversas universidades alemãs.

Queremos destacar também, a existência de cursos famosos cujas notas de aula do professor Hilbert foram transformadas em textos que compõem os manuais para classes dos cursos de matemática universitária à época.

- 1- O curso de verão de 1891, *Notas de aula sobre geometria projetiva*;
- 2- O curso iniciado no verão de 1894, *Notas sobre os fundamentos da geometria*;
- 3- O curso ministrado no feriado de páscoa de 1898, que deu origem ao texto *Über den Begriff des Unendlichen* e
- 4- O curso iniciado no inverno de 1898, extendendo-se até 1899, com o sugestivo nome de *Fundamentos da Geometria Euclidiana*.

Há ainda um extenso material de propriedade do professor Otto Volk (1918-1989), na cidade de Würzburg. Este material permitiu ao professor Michael-Markus Toepell (1951- ...), da Universidade de Leipzig demonstrar as origens da contribuição de Hilbert para o Festschrift como também reconstruir os passos omitidos por Hilbert em suas publicações acerca da aplicação do método axiomático na Matemática.

Muitas conclusões poderiam ser obtidas através das correspondências de Hilbert com os matemáticos da época, se tais cartas não estivessem tão espalhadas e muitas delas perdidas. Pensamos até que seja possível fazer uma reconstrução da gênese do conceito de *fundamentos* para a geometria Euclidiana segundo a contribuição formalista hilbertiana. Glymour and Earman (1978) afirmam que as correspondências mais preservadas são aquelas que foram trocadas com Einstein, pois estão guardadas com a coleção de papers e documentos históricos sobre a Teoria da Relatividade. Toepell (1986) nos informa que durante a sua pesquisa para o seu doutoramento não encontrou com facilidade as correspondências de Hilbert com datas anteriores a 1900. Tal fato nos faz concluir que os historiadores da Matemática formulam hipóteses



sobre as obras de Hilbert a partir dos desdobramentos e implicações históricas, filosóficas e matemáticas que estas obras produziram em um determinado corte histórico e não a partir da análise de materiais originais como as cartas.

Os principais correspondentes de Hilbert foram: Minkowski, Hurwitz, Lindemann e Klein. Dentre estes, Minkowski foi o matemático que mais se comunicou com Hilbert através de cartas. Há mais de cem correspondências de Minkowski endereçadas à Hilbert. Elas foram publicadas em 1973, sob o título *Hermann Minkowski Briefe an David Hilbert*, por L. Rudenberg e H. Zassenhaus, da Springer-Verlag.

Com Klein, Hilbert estabeleceu estreitos laços matemáticos e desenvolveu complexos estudos, assim como participou de longas discussões sobre geometria. Tais estudos foram publicados em 1985 com o título *Der Briefwechsel David Hilbert-Felix Klein (1886-1918): Mit Anmerkungen herausgegeben von Günther frei Göttingen*, por Vandenhoeck e Ruprecht.

As correspondências com Lindemann (1852-1939) e Hurwitz (1859- 1919) estão no acervo da Universidade de Göttingen. São correspondências que ainda não foram publicadas na íntegra. Não temos ainda conhecimento de algum pesquisador na área de história da Matemática que tenha se interessado em organizá-las para estudos.

Encontramos na obra de Gottlob Frege (1848-1925) traduzida para o inglês, *“On the foundations of geometry and formal theories of arithmetic”*, vários trechos de cartas trocadas entre Frege, Hilbert e Korselt (1864-1947) acerca da natureza da geometria. Esta série de correspondências é datada do início de 1903 e é entendida por muitos historiadores da matemática e da lógica como gênese de uma série de estudos sobre os fundamentos da Matemática. A série de artigos de Frege contidos no livro pode ser dividida em dois grupos: um datado de 1903, que constitui a apresentação pública do pensar de Frege sobre os escritos de Hilbert no Festschrift e o segundo, datado de 1906, que apresenta a réplica de Korselt, em defesa de Hilbert e de sua obra.



Acreditamos que a leitura do texto de Frege torna-se mais significativo, se acompanhada de uma leitura minuciosa do artigo *On formal theories of arithmetic*, também de sua autoria. Os textos se completam e o segundo esclarece muito o pensamento do autor sobre o assunto. Há quem ainda sugira o texto de Husserl, *Philosophy of Arithmetic*, que a nosso ver é denso e caminha mais pelos aspectos da lógica propriamente ditos do que pelos fundamentos da Matemática, como esperávamos.

Ainda na obra de Frege supracitada, encontramos na parte I um texto muito interessante. É uma carta de Frege para Liebmann (1840-1912) escrita aos 25 de agosto de 1900, em Bad Steben. Hoje, além da importância histórica deste documento para o estudo dos fundamentos da Matemática, esta carta nos mostra também a diversidade e complexidade filosófica dos tópicos abordados em seu conteúdo. Nela há uma exposição informal feita por Frege acerca das relações entre as lógicas de primeira e segunda ordem para justificar o que, no seu ponto de vista, seriam os equívocos cometidos por Hilbert no seu *Festschrift*, o *Grundlagen der Geometrie*. O contato com este texto, nos ventilou a possibilidade de Hilbert ter caminhando em direção a um terreno minado ao dedicar seus esforços na tentativa de mostrar que a Matemática, como um todo, não admitia contradições internas. Neste ponto da História da Matemática, acreditamos fortemente que, por alguma razão, faltou a Hilbert uma compreensão de *caráter filosófico* acerca da *completude* e esta falta de compreensão passa pelo fato de não ter lançado mão, com segurança, da metamatemática. Esta afirmativa, extremamente forte, nos ocorreu assim que conhecemos as objeções de Frege ao programa de Hilbert, escritas por Eike-Henner W. Klunge (1942 - ..), na introdução da edição inglesa de 1971 de *On the foundations of geometry and formal theories of arithmetic*, de Frege. As objeções são classificadas em dois grupos: as objeções sistemáticas (contra a natureza e a construção do sistema propriamente dito) e as objeções metodológicas (sobre a prova da independência dos axiomas).



Considerações finais

Nos parece que a intenção de apresentar David Hilbert através de suas produções acadêmicas, nos permitiu compreender o seu caráter universalista no circuito dos matemáticos europeus do final do século XIX até a primeira metade do século XX, período de produções acadêmicas variadas.

Está presente nesta pesquisa de caráter bibliográfico, o objetivo de mostrar à comunidade de estudantes de matemática, a matemáticos profissionais e a historiadores da matemática que a produção de David Hilbert vai para além dos teoremas e espaços que levam o seu nome em livros de Análise no \mathbb{R}^n , Espaços Métricos ou Análise Funcional; e que a maneira de se apresentar como um matemático puro, formal e logicista está presente em todos os seus trabalhos, independente de suas naturezas ou do campo do conhecimento matemático ou físico que se propôs estudar.

Seu alcance e generosidade permitiram que outros matemáticos pudessem desenvolver suas ideias ou mesmo aprimorá-las sob sua supervisão. Foram cinquenta alunos orientados em teses de doutoramento. Por mais que seja lembrado como o matemático que listou os vinte e três problemas em aberto à época no Congresso Internacional de Matemáticos de Paris, em 1930, é importante remarcar que este ato teve uma intencionalidade, marca característica de sua personalidade, a de manter acesa nos matemáticos o gosto pela resolução de problemas.

David Hilbert orientou mulheres de destaque como Anne Lucy Bosworth Focke (1868-1907), Nadeschda Gernet (1877-1943), Margarethe Kahn (1880-1942) e Klära Lobeinstein (1883-1968). Era um homem a frente de seu tempo e valorizava o trabalho das mulheres na Matemática. Destacou os trabalhos de Emmy (Noether(1882-1935) , orientada em sua tese de doutoramento por Paul Gordan (1837-1912), como os mais importantes para a História da Matemática. Em 1915, Emmy Noether é convidada por Hilbert para lecionar na Universidade de Göttingen, porém os membros do conselho não aprovaram sua indicação,



entretanto ela passou quatro anos lecionando sob a tutela de Hilbert até sua habilitação ser aprovada em 1919. Que sua obra possa ser estudada e seja sempre incentivo para novas descobertas e despertar de novas ideias entre estudantes, matemáticos e historiadores da Matemática.

REFERÊNCIAS

CASSOU-NOGUÈS, P. **Hilbert**. Ed. Les Belles Lettres. Figures du Savoir, 2004.

DEUDONNÉ, J. Les méthodes axiomatiques des mathématiques. **Révue Scientifique**, n77, p.224-213, 1939.

ERMAN, J. ;GLYMOU, C. Einstein and Hilbert: two months in the History of General relativity, **Archives for Histoire of Exact Sciences**, v. 19, p. 291-308.

GRAY, J. **Le défi de Hilbert**, Oxford University Press, 2000.

Reid, C. **Hilbert**. Springer Verlag. Copernicus, NYC, 1970.

TOTPELL, M.M. **Über die Entstehung von David Hilbert: Grundlagen der Geometrie**. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1936.

WEYL, H. DAVID Hilbert and his mathematical work. **Bulletin of the Mathematical American Society**, n. 50, p. 612-654, 1944.