



A EXPLORAÇÃO DO TEOREMA DE VIVIANI COM GEOGEBRA: UMA ABORDAGEM DINÂMICA

Ivonne C. Sánchez S.¹

Luis Andrés Castillo B.²

RESUMO

Desde a chegada do século XXI os softwares de matemática dinâmica como o GeoGebra têm sido usados de maneira recorrente para novas interpretações de demonstrações próprias da geometria euclidiana. Neste trabalho temos por objetivo descrever as possibilidades de utilizar o software de matemática dinâmica GeoGebra, explanando uma releitura da demonstração do Teorema de Viviani, gerando um passo a passo para elaboração no GeoGebra e aplicação desta proposta em sala de aula. Nos baseamos nos fundamentos do uso das tecnologias digitais junto à História da Matemática no ensino e aprendizagem da Matemática, onde são tratadas as primeiras ideias do uso combinado de Tecnologia Digital à História da Matemática. Nas duas seções seguintes, justifica-se a utilização da História da Matemática, da Tecnologia Digital e do GeoGebra, no desenvolvimento deste trabalho. Foram discutidas as formas de uso do GeoGebra como artefato de construção, para a representação e comunicação do conhecimento matemático, como uma maneira de visualização e como médio de (re)descoberta, na demonstração do teorema de Viviani materializada por informações históricas.

Palavras-chave: Teorema de Viviani. Tecnologias Digitais. História da Matemática. GeoGebra. Ensino.

INTRODUÇÃO

Segundo Mendes (2022) a História da Matemática como campo de pesquisa está em constituição no Brasil desde as últimas cinco décadas do século XX e início do século XXI. Nesse percurso pesquisadores nos meios acadêmicos relacionados à área de Educação Matemática têm refletido e dialogado entre tendências da pesquisa em História da Matemática. Uma destas é uma tendência que tem como objeto de estudo e pesquisa as potencialidades do uso combinado da História da Matemática (HM) e das Tecnologias Digitais (TD) para o Ensino da Matemática (SOUSA, 2021; SOUSA; ANDRADE, 2016).

¹ Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Pará (UFPA). Ivonne.s.1812@gmail.com

² Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Pará (UFPA). luiscastleb@gmail.com



Neste sentido, Mendes (2015, p. 127) apoia a referida aliança quando expressa que o uso da história da matemática em sala de aula permite ao estudante aprender matemática conectada com as necessidades de “contextualização, problematização, interdisciplinaridade, transversalidade”, e ainda mais quando a atividade de aprendizagem que pode ser materializada com apoio das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), é dizer, as Tecnologias potenciam as ações pedagógicas da história da matemática em sala de aula.

Para Sousa (2021) um desses tipos de tecnologias que possibilita esta aliança com possibilidades pedagógicas no ensino da matemática é o GeoGebra, um *software* de Matemática Dinâmica capaz de combinar ambientes de Geometria Dinâmica (GD), Sistema de Álgebra Computacional (CAS), Planilhas eletrônicas, estatística e probabilidade, tudo num único aplicativo.

Do ponto de vista do ensino e aprendizagem, a integração do GeoGebra nas aulas de Matemática tem favorecido o desenvolvimento nos alunos de capacidades de experimentação (SÁNCHEZ; PRIETO, 2016), visualização e reconhecimento de propriedades invariantes (GUTIÉRREZ; CASTILLO, 2020; LEÓN *et al.*, 2021) como consequência da interação dos sujeitos com as representações de objetos da matemática na interface do GeoGebra.

Nesse contexto, podemos observar um tipo de abordagem que, cada vez mais, vem ganhando espaços de diálogos, discussões e reflexões em sala de aula, congressos científicos, na formação continuada de professores, nos referimos ao uso do GeoGebra para dinamizar demonstrações de teoremas tanto clássicos da geometria euclidiana plana, como de outras áreas, aonde esta tecnologia digital permite novas formas de explorar, construir, visualizar, generalizar, conjecturar, etc. (ALENCAR *et al.*, 2022; SÁNCHEZ; CASTILLO, 2022; SÁNCHEZ; CASTILLO; LUQUE, 2021).

Pelo exposto anteriormente, nosso objetivo é descrever as possibilidades de utilizar o *software* de matemática dinâmica GeoGebra na demonstração do Teorema do matemático italiano Vincenzo Viviani. Para alcançar nosso objetivo, primeiramente, procuramos saber o que sugerem as orientações curriculares tanto internacionais como nacionais sobre o uso das tecnologias na sala de aula.



Depois, aprofundar sobre os modos de usar o GeoGebra na sala de aula na literatura específica na educação matemática. Logo, colocamos em contexto o teorema de Vincenzo Viviani, seguidamente a nossa abordagem no GeoGebra, para fecharmos com nossas considerações finais.

TECNOLOGIAS DIGITAIS EM CURRÍCULOS

A partir do surgimento do computador e outras ferramentas eletrônicas, denominadas Tecnologias Digitais (TD), foram cada vez mais se adentrando nos processos de ensino e a aprendizagem, em particular, falaremos aqui ensino da matemática, o qual tem sido objeto de estudo por diversos pesquisadores do campo da Educação Matemática (ROJANO, 2014). Neste sentido, não é de estranhar que princípios, parâmetros e outros documentos de natureza curricular incorporem no seu corpus documental de orientações um espaço reconhecido para estas TD com motivo de apoio pedagógico para os professores.

Um primeiro exemplo disto são os Princípios e Normas para a Matemática Escolar do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM). No documento, as Tecnologias Digitais são consideradas para a matemática escolar do século XXI, como um dos tantos princípios, ao estabelecer nas práticas educativas na sala de aula, quando se refere que: “A tecnologia enriquece o alcance e a qualidade das investigações ao proporcionar um meio para ver ideias matemáticas desde múltiplas perspectivas, portanto, são ferramentas essenciais para ensinar, aprender e fazer matemática (NCTM, 2000, p. 24–25).

Outro exemplo, no de contexto nacional é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) o qual é o mais recente documento para orientar a Educação Brasileira. Este documento estabelece o uso de tecnologias na formação dos currículos educacionais, já que são fontes que estimulam a curiosidade e instigam os questionamentos dos estudantes. Podendo então, proporcionar a criatividade, lógica e o pensamento crítico, além do fortalecimento na elaboração de perguntas, análise das respostas, desse modo a contribuir na interação com as mais variadas manifestações culturais (BRASIL, 2018). Em que, “fazer uso de tecnologias de informação e comunicação, possibilita aos alunos ampliar sua



compreensão de si mesmos, do mundo natural e social, das relações dos seres humanos entre si e com a natureza” (BRASIL, 2018, p. 60)

Para o ensino de matemática, entende-se que o documento coloca as tecnologias como um modelador dos pensamentos e abstrações matemáticas, podendo o aluno resolver quaisquer problemas que sejam lhe imposto no seu dia a dia. Uma das competências na BNCC, diz que é necessário “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2017, p. 267).

Dadas as possibilidades que oferecem no desenvolvimento da atividade matemática da aula, as TD são consideradas como ferramentas que transformam as práticas matemáticas de professores e alunos, sempre que não sejam tratados de maneira instrumentalizada (BORBA; VILLARREAL, 2005; HOYLES, 2018). Neste sentido, no próximo tópico descrevemos as formas de usar o GeoGebra na sala de aula de maneira a ultrapassar esse paradigma instrumentalista.

USOS DO GEOGEBRA

Neste tópico nos fundamentamos nas ideias de Prieto (2016), este apresenta uma categorização sobre o uso do GeoGebra em situações de ensino e aprendizagem da Matemática, em que descreveremos a seguir:

Como *ferramenta de visualização*, o GeoGebra pode ser usado para oferecer uma perspectiva dinâmica de conceitos e relações matemáticas, a partir de múltiplos registros de representação. Desta forma, os sujeitos têm a possibilidade de “ver” e “explorar” conhecimentos matemáticos muitas vezes inacessíveis com outros dispositivos. Por exemplo, ao modificar a representação geométrica de uma função real por meio da ferramenta arrastar, os parâmetros associados à fórmula correspondente (registro numérico-algébrico) são modificados em tempo real. Da mesma forma, quando você modifica os parâmetros de uma função real na janela de álgebra, a representação gráfica associada se ajusta imediatamente.



Como *ferramenta de construção*, este *software* permite a criação e manipulação de construções geométricas em 2D e 3D, com altos níveis de liberdade e consistência, favorecendo assim o estudo de objetos de geometria euclidiana e analítica.

Como *ferramenta de descoberta*, o GeoGebra pode favorecer a descoberta de padrões, regularidades ou invariantes matemáticos (por exemplo, invariantes geométricos) nos objetos exibidos em sua interface, o que aproxima os alunos do conhecimento matemático institucionalizado.

Como *ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático*, esta tecnologia digital oferece aos professores um ambiente amigável para o desenvolvimento de materiais dinâmicos através dos quais eles podem representar e comunicar conceitos matemáticos.

Entendemos que estes modos de usar o GeoGebra descritos por Prieto (2016) permite uma visão mais ampla de como os professores integram este *software* de matemática dinâmica em suas aulas de classes com diferentes propósitos.

VINCENZO VIVIANI E SEU TEOREMA³

O matemático Vincenzo Viviani (1622-1703), nasceu em Florença, 5 de abril de 1622. Segundo registros históricos foi constatado que Viviani (Figura 1) estudou com os jesuítas em Florença e estudou matemática com Clemente Settimi da Scuole Pie. O Settimi, que ficou impressionado com a inteligência e habilidade de Viviani, e o apresentou a Galileu, e a descrição de Settimi de seu aluno levou à sua apresentação ao Grão-Duque em 1638. O Grão-Duque forneceu uma quantidade fixa da moeda dessa época, por ano ao jovem para fornecer-lhe conhecimentos matemáticos, livros, e mais tarde ele conseguiu que Viviani fosse companheiro e pupilo de Galileu, um arranjo que começou no final de 1639 e durou até a morte de Galileu. Os anos com Galileu substituíram a formação universitária.

Figura 1: Vincenzo Viviani (1622 -1703)

³Para ampliação destas informações recomendamos visitar: <http://galileo.rice.edu/index.html>



Fonte: Google imagens

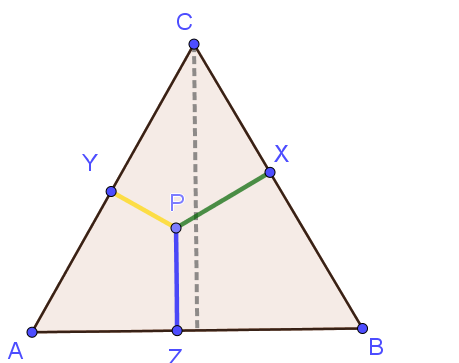
Entre as contribuições disciplinares de Viviani temos que, tentou restaurar o quinto livro dos Elementos de Euclides e reconstruir o conteúdo do quinto livro perdido das Cônicas de Apolônio e de locis solidis de Aristeu. Viviani preparou uma versão italiana do trabalho de Arquimedes sobre a retificação e a quadratura do círculo, e publicou uma tradução italiana de todos os Elementos de Euclides. O principal interesse de Viviani era a matemática aplicada, por isso, a maioria dos seus estudos foram dirigidos a esse campo de atuação. Alguns fatos importantes a destacar, por exemplo, no ano de 1660, é que por meio de um experimento no qual fez a correlação de intervalo de tempo entre o disparo de uma bala de um canhão e o som emitido conseguiu melhorar o cálculo da velocidade do som.

A história constata que Viviani constitui-se um bom exemplo do grande valor que se atribuía ao trabalho dos matemáticos na sua época, isto, baseados que entre as tantas descobertas e contribuições intelectuais que nos deixou. Uma destas tantas contribuições foi a exploração de uma curiosa propriedade intrínseca aos triângulos equiláteros.

Viviani descobriu que, se tomar um ponto qualquer na região interna de um triângulo equilátero, podemos observar que a soma das distâncias entre esse ponto a cada um dos três lados do triângulo será sempre igual ao comprimento da sua altura. Em outras palavras, este matemático demonstrou que $PX+PY+PZ$

= h , sendo P um ponto qualquer na região interior do $\triangle ABC$ equilátero de altura h (Figura 2).


Figura 2: Teorema de Viviani




Fonte: Elaboração própria dos autores

A VERIFICAÇÃO DO TEOREMA VIVIANI

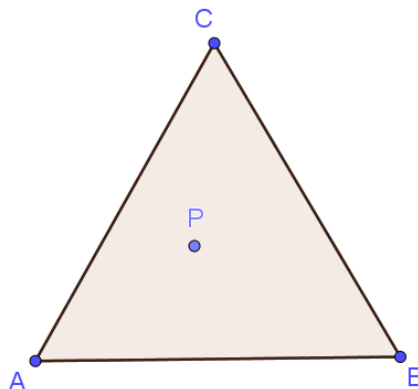
Lembremos que o Teorema de Viviani diz que *A soma das distâncias aos lados de um triângulo equilátero de um ponto pertencente ao seu interior ou a seus lados é constante e igual à medida da altura do triângulo*. Em vista disto, temos vários objetos matemáticos que representam, entre estes, o $\triangle ABC$ equilátero, um ponto P interior a este polígono, a altura h do mesmo e três segmentos que convergem em P desde os lados do referido triângulo equilátero.

Nossa demonstração dará início pela construção de um $\triangle ABC$ equilátero, para isto, vamos na barra de ferramentas e escolhemos polígono regular , essa ferramenta garante que todos os lados do polígono sejam do mesmo comprimento. Após selecionar a ferramenta, se faz clique na janela de visualização do GeoGebra, construindo dois vértices do segmento base para o GeoGebra construir os outros lados do nosso triângulo equilátero.

Após determinar a posição dos vértices o *software* abrirá uma janela emergente para que coloque a quantidade de vértices da figura que queremos construir, no nosso foi digitado 3, assim obteremos o triângulo equilátero. Depois, Selecionaremos na Caixa de Pontos, a ferramenta Ponto em objeto , e clique dentro da área do nosso triângulo ABC , teremos o ponto P (Figura 3), por meio da ferramenta mover, podemos arrastar tanto os vértices ou também o

ponto no interior do triângulo, e nessa exploração observamos que o movimento de P se limita à área do triângulo.

Figura 3: Construção do triângulo equilátero e o ponto P



Fonte: Elaboração própria dos autores



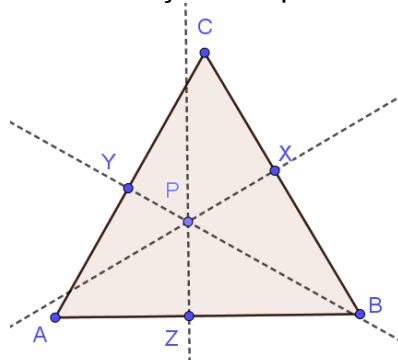

Neste momento, encontraremos os pontos X , Y e Z , situados nos lados a , b e c respectivamente. Para isto, devemos utilizar a ferramenta Reta Perpendicular  clicando no ponto P nos lados a , b e c do referido triângulo. Depois com a ferramenta Interseção de dois objetos , selecionamos as retas criadas com seu respectivo lado de corte do triângulo, determinando assim a localização dos pontos X , Y e Z (Figura 4).

Figura 4: Construção dos pontos X , Y e Z

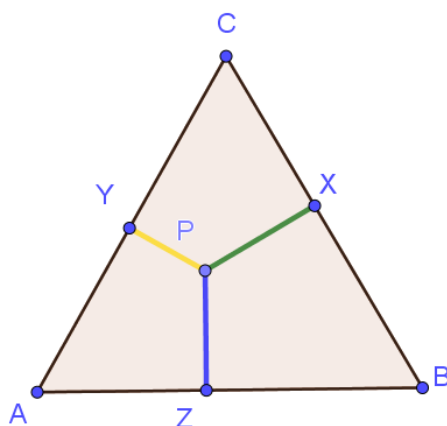


Fonte: Elaboração própria dos autores

Neste momento será dedicado na construção dos segmentos \overline{PX} , \overline{PY} e \overline{PZ} , no nosso cenário tendo os extremos deles, só precisamos mediante a ferramenta segmento , construir estes como se observa na figura 5. Destacamos que

para uma melhor visualização foi decidido atribuir propriedades de cores diferentes.

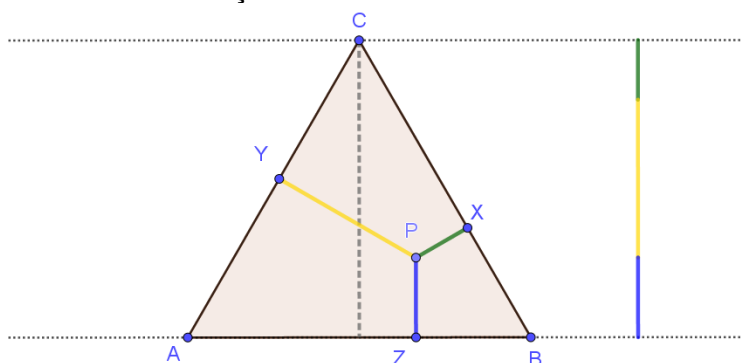
Figura 5: Construção dos segmentos \overline{PX} , \overline{PY} e \overline{PZ}



Fonte: Elaboração própria dos autores

Finalmente, fazemos a construção do segmento h , que representará nossa altura do triângulo ABC , mediante as ferramentas reta perpendicular e interseção de dois objetos. Destacamos que na figura 6, construímos outros elementos que ajudam a demonstrar este teorema tanto por comprovação de comprimentos como de maneira geométrica e visual.

Figura 6: Demonstração do Teorema de Viviani no GeoGebra



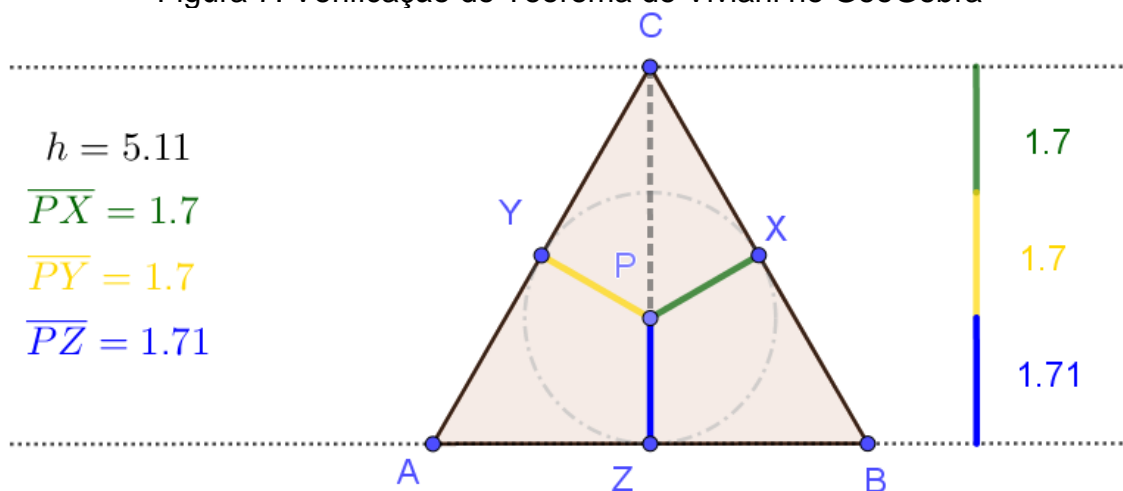
Fonte: Elaboração própria dos autores

Até este momento, temos usado o GeoGebra como *ferramenta de construção* e como *ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático*. Agora daremos encaminhamento para usar o

software como uma *ferramenta de visualização* e como *ferramenta de descoberta* na demonstração do teorema de Viviani. Para isto, precisamos plantear algumas questões problematizada, por exemplo: Seria possível P assumir uma localização dentro da região triangular para que as medidas dos segmentos \overline{PX} , \overline{PY} e \overline{PZ} sejam iguais? Se possível essa localização, seria um ponto notável?

Nessa exploração por parte dos alunos, os mesmos por meio de arrastar o ponto P , vão experimentar diferentes posições desse ponto até chegar num aproximado como se observa na figura 7, com ajuda do professor para orientar a atividade pode dirigir a atenção que essa localização coincide com um dos pontos notáveis de um triângulo, o incentro. Nesse sentido as questões planteadas foram fechadas, porém, agora surgem outras em abertos, por exemplo, como são os comprimentos desses segmentos se P .

Figura 7: Verificação do Teorema de Viviani no GeoGebra



Fonte: Elaboração própria dos autores

Neste tópico, se descreve tanto a elaboração de uma maneira de demonstrar o teorema de Viviane com GeoGebra, bem como, possíveis explorações para provocar nos envolvidos na atividade, problematizações a serem respondidas. Isto pelo fato que acreditamos no processo de construção e exploração da demonstração são mobilizados diversos conceitos matemáticos que podem ser aproveitados pelo professor de matemática para a promover o ensino destes na sala de aula.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, nosso objetivo descrever as possibilidades de utilizar o software de matemática dinâmica GeoGebra na demonstração do Teorema do matemático italiano Vincenzo Viviani.

Neste sentido foram destacadas quatro maneiras de usar o GeoGebra: como *ferramenta de construção*, *ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático*, como uma *ferramenta de visualização* e como *ferramenta de descoberta* na demonstração do teorema de Viviani. Tais formas, por um lado, consideramos que podem amplificar as capacidades cognitivas do raciocínio na hora da exploração, generalização e experimentação na demonstração de teoremas da geometria euclidiana plana, como no nosso caso o Teorema de Viviani.

Consideramos isto, pelo fato do GeoGebra permitir visualizar casos particulares, como também viabilizar a abordagem de questões ao respeito sobre o a variação dos comprimentos dos segmentos em função da localização do ponto P na região triangular. Neste caso por meio desta tecnologia digital conseguimos ampliar as informações históricas sobre este teorema e gerar assim novas questões que podem ser exploradas na sala de aula da Educação Básica.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas do Pará (FAPESPA) e da Universidade Federal do Pará via Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação (PROPESP) Edital 08/2023 – Programa De Apoio Ao Discente – PRODISCENTE

REFERÊNCIAS

ALENCAR, Hilário; CÂNDIDO, Larissa; GARCIA, Ronaldo; MATHIAS, Carmen. O GeoGebra como ferramenta de apoio ao entendimento de demonstrações em Geometria. **Revista Professor de Matemática On-line**, [S. l.], v. 10, n. 33, 2022. <https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1033>



BORBA, Marcelo C.; VILLARREAL, Monica E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**. New York: Springer, 2005. v. 39
<https://doi.org/10.1007/b105001>.

GUTIÉRREZ, Rafael Enrique; CASTILLO, Luis Andrés. Simuladores com o software GeoGebra como objetos de aprendizagem para o ensino da física. **Tecné Episteme y Didaxis: TED**, [S. l.], n. 47, p. 201–216, 2020.
<https://doi.org/10.17227/ted.num47-11336>

HOYLES, Celia. Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. **Research in Mathematics Education**, [S. l.], v. 20, n. 3, p. 209–228, 2018.
<https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1484799>

LEÓN, Maibelys Josefina; GUZMÁN, Marilin; SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto Sánchez; BRACHO, Luis Andrés Castillo. Ensino de transformações de funções com GeoGebra: O caso de parabolóides definidos por $g(x,y)=a(x-h)^2+b(y-k)^2+c$. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. e2001, 2021. <https://doi.org/10.35819/remat2021v7i1id4075>

MENDES, I. A. História para o ensino de matemática: fundamentos epistemológicos, métodos e práticas. **COCAR**, Bélem, v. Edição Esp, n. 14, p. 01–26, 2022.

MENDES, Iran Abreu. **História da matemática no ensino: Entre trajetórias profissionais, epistemológicas e pesquisas**. 1a. ed. São Paulo: Livraria da Física/SBHMat, 2015.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. 3. ed. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

PRIETO G., Juan Luis. GeoGebra en diferentes escenarios de actuación. **Revista Electrónica Conocimiento Libre y Licenciamiento (CLIC)**, [S. l.], v. 7, n. 14, p. 9–23, 2016.

ROJANO, Teresa. El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática : prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. **Educación Matemática**, [S. l.], v. Especial, n. 25 años, p. 11–30, 2014.
<https://doi.org/10.24844/EM>

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés. Uma antiga demonstração do teorema de Pitágoras desde a perspectiva da geometria dinâmica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 9, n. 26, p. 214–226, 2022. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8030>

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés; LUQUE, Rafael. Tecnologías Digitales y la Geometría Escolar: El GeoGebra para la enseñanza del teorema



de Pitágoras. **REMATEC**, [S. l.], v. 16, n. 37, p. 160–175, 2021.
<https://doi.org/10.37084/rematec.1980-3141.2021.n37.p160-175.id316>

SÁNCHEZ, Ivonne C.; PRIETO, Juan Luis. Algunos ejemplos del uso experimental del GeoGebra en situaciones de simulación y diagramación. In: (Yolanda Serres, Org.) IX CONGRESO VENEZOLANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA 2016, Barquisimeto. Anais [...]. Barquisimeto: ASOVEMAT, 2016. p. 466–478.

SOUSA, Giselle Costa De. Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. **REMATEC**, [S. l.], v. 16, n. 37, p. 140–159, 2021.
<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p140-159.id310>

SOUSA, Giselle Costa De; ANDRADE, Luciana Vieira. Uma proposta de uso da história da matemática apoiada pelas TIC e HM para o ensino de função. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 3, n. 7, p. 41–53, 2016. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v3i7.64>