Problemas geométricos abordados na Baixa Idade Média (do século XI ao XV)

João Paulo do Nascimento Lima[1]

Viviane de Oliveira Santos[2]

RESUMO

Este artigo relata o processo de desenvolvimento da geometria no período da Baixa Idade Média (XI a XV), nas regiões oriental e ocidental da Europa. Com o objetivo de entender os aspectos históricos que contribuíram com esse desenvolvimento, foram analisados problemas geométricos abordados durante os séculos XI e XV, seus autores, a finalidade e o contexto sob qual tais problemas foram desenvolvidos. Para melhor compreensão e representação, este artigo apresenta uma remodelação através do software *GeoGebra* dos problemas encontrados nas literaturas estudadas. Ao abordar esse tema, investigamos como a geometria se desenvolveu no período, os matemáticos da época, suas contribuições e impactos gerados pelas mesmas em três das principais sociedades da época: ocidental cristã, muçulmana e judaica. Fortemente influenciadas pelo apego religioso, tais sociedades buscavam expandir suas crenças, comércio, territórios e costumes, e a contribuição matemática da época foi determinante para facilitar atividades diárias e, em alguns casos, foi base para fortalecer certos aspectos religiosos destas culturas.

Palavras-chave: História da Matemática. Geometria. Baixa Idade Média. *GeoGebra*.

INTRODUÇÃO

O artigo é resultado de uma pesquisa do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic), realizada pelo Grupo de Pesquisa História da Matemática e Educação Matemática da Universidade Federal de Alagoas (Ufal).

Foi levando em conta a importância de se realizar pesquisas com foco em matemática do ponto de vista historiográfico e observando sua eficácia no entendimento do pensamento da época, bem como as interferências políticas e religiosas no campo do conhecimento, que decidimos verificar como eram abordados os problemas geométricos encontrados na Europa, no período da Baixa Idade Média. Nesta pesquisa, procuramos analisar não só as construções geométricas, mas também seus impactos e influências no meio em que foram desenvolvidas, tornando relevante o estudo não só da matemática, mas também o de sua história.

[1] Graduando da Universidade Federal de Alagoas (Ufal) / joao.nascimento@im.ufal.br
[2] Docente da Universidade Federal de Alagoas (Ufal) / viviane.santos@im.ufal.br

Brasil (1997) ainda ressalta a importância do estudo em história da matemática sob os aspectos social, cultural e antropológico.

> Os conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. (BRASIL, 1997, p. 34)

Este resgate é um dos incentivos que nos levaram a aprofundar aspectos que contribuíram com o desenvolvimento da geometria no período. Para tal, consultamos as literaturas de: Saito (2015), Roque (2012), Katz *et al*. (2016) e Schwartz (2010), nas quais somos apresentados a matemáticos de diferentes regiões culturas e obras, que apresentam traduções dos conhecimentos oriundos das culturas gregas e hindu-árabe e trabalhos de sua própria autoria. Na região ocidental, fomos apresentados ao nascimento das primeiras universidades e ao modo como as mesmas iniciaram seu desenvolvimento. Deste modo, foi possível estudar, reproduzir e analisar o contexto sob o qual problemas e teoremas geométricos foram elaborados e como eles impactaram suas respectivas culturas.

A matemática por alguns estudiosos é considerada a mais antiga das ciências. Para explicar melhor a respeito dessa informação e dar a importância necessária a esse assunto na formação dos novos professores, Soares (2004) escreve em seu estudo que:

> [...] através dessa ferramenta, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores positivos frente ao conhecimento matemático. O aluno reconhecerá a Matemática como uma criação humana, que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano. Conhecerá as preocupações dos vários povos em diferentes momentos históricos identificando a utilização da Matemática em cada um deles e estabelecerá comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente (DELLA NINA *et al.*, 2005, p.73)

De tal modo, a história da matemática é parte fundamental do conhecimento matemático, a fim de contextualizar e compreender os impactos e funções das descobertas e construções matemáticas ao longo da história, Em sala de aula, o professor poderá utilizar da História da Matemática na Baixa

Idade Média no desenvolvimento da prática pedagógica. Como cita Motta (2005), seu papel é fundamental no processo de ensino e aprendizagem.

> A História da Matemática pode exercer um importante papel psicológico no processo de ensino-aprendizagem tanto em relação ao professor quanto em relação ao aluno. Ao estudante pode propiciar condições de perceber as diversas etapas da construção do pensamento matemático, entender as diferentes práticas sociais que geraram as necessidades de sua produção e trabalhar as diversas linguagens e formas simbólicas que o constituem e o condicionam. Ao professor, permite problematizar a ação pedagógica no sentido de se criar uma consciência das vivências e recursos cognitivos e interpretativos necessários para uma apropriação significativa das ideias matemáticas. (MOTTA, 2005, p.11).

Este fato enfatiza a importância tanto de nossa pesquisa, como da busca dos futuros professores em conhecer a história da matemática, enriquecendo seu o processo de construção do conhecimento e consequentemente o de seus alunos.

O processo de elaboração deste artigo foi realizado por meio de pesquisa bibliográfica e auxílio do software *GeoGebra*[3] na resolução dos problemas geométricos analisados. Esta ferramenta, cada vez mais presente no auxílio do ensino e aprendizagem, age como facilitador e reprodutor das mais variadas demonstrações.

Segundo Gomes (2012), Gravina (1996) e Arcavi e Hadas (2000), o uso do *GeoGebra* evidencia uma nova abordagem ao aprendizado geométrico, no qual conjecturas são feitas a partir da experimentação e criação de objetos geométricos. Deste modo, pode-se introduzir o conceito matemático a partir da resposta gráfica oferecida pelo programa *GeoGebra*, surgindo naturalmente daí o processo de questionamento, argumentação e dedução.

Inicialmente, a pesquisa buscou compreender como se deu o desenvolvimento da geometria no período da Baixa Idade Média, nas regiões ocidental e oriental da Europa, a fim de explorar e analisar o contexto, motivações e a finalidade sob a qual a geometria se desenvolveu dos séculos XI

[3] Criado por Markus Hohenwarter, o *GeoGebra* é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). (GOMES, 2012)

ao XV. Deste modo, foi possível abordar e analisar problemas geométricos discutidos na época, para remodelar sua apresentação com uso do software *GeoGebra*.

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS ABORDADOS NA BAIXA IDADE MÉDIA

De acordo com Saito (2015), o período que durou dos séculos XI ao XV, conhecido por Baixa Idade Média, foi um importante período de transição para as matemáticas e para a retomada do desenvolvimento científico que havia estagnado por um longo período na Europa. Os conflitos decorrentes dos séculos XI ao XIII e a posterior queda de Constantinopla, abriram as portas da Europa para diversos sábios do mundo árabe com seus livros e manuscritos.

Contudo, Saito (2015) afirma que tal transição, extremamente lenta, viabilizou-se graças às rotas de comércio entre árabes e cristãos latinos restabelecidas ainda no século IX, de modo que por volta do século XI, Alderard de Bath (1080–1152) e posteriormente no século XIII Leonardo de Pisa (1170–1240), foram os principais estudiosos latinos em regiões de domínio árabe.

Durante o Século XI, as traduções de obras literárias do árabe para o latim se tornaram uma realidade. Os trabalhos de Al-Khwarizmi (850–929) e Al-Farghani (Século IX), os estudos de óptica e perspectiva, desenvolvidos por Al-Kindi (801–873) e Alhazen (965–1040), a partir de obras de Euclides (Século III a.C.), Ptolomeu (90–168) e Heron de Alexandria (10–80) foram os primeiros manuscritos a serem traduzidos. Contudo, os europeus medievais estavam com foco direcionado a recém-descoberta álgebra indiana, como cita Saito (2015) em sua obra.

> No que diz respeito à aritmética e à geometria, as contribuições não foram tão significativas, visto que perpetuaram os conhecimentos gregos e alexandrinos sem acrescentar-lhes novidades significativas. Embora os árabes tivessem desenvolvido muito pouco essas disciplinas, aprimoraram a álgebra tendo por base as matemáticas indianas. [...] (SAITO, 2015, p. 137)

Com o aumento do comércio e consequente crescimento da economia medieval, houve uma demanda natural pela propagação do conhecimento por parte da sociedade, o que possibilitou “A criação de um dos mais influentes meios de disseminação do conhecimento matemático: a universidade medieval.” [...] (SAITO, 2015, p. 138)

No início do século XII, foram fundadas as primeiras universidades em Bologna (Itália), Oxford (Inglaterra) e Paris (França). Nesse cenário, essencialmente, as universidades eram divididas entre mestres e estudiosos, geralmente formadas pelas faculdades de: Artes, Direito, Medicina e Teologia. A geometria, em especial, foi dividida em pura e prática, e esta última subdividida em agrimensura, mecânica, ciência dos pesos e das balanças, perspectiva, ciência dos espelhos e ciência do equilíbrio dos líquidos. (SAITO, 2015)

A geometria passou por algumas mudanças, em seu conceito e descrição, passando a ter um apelo mais empírico, sendo o escrito *Practica Geometriae (Hugo de São Victor 1125)* a principal obra a referenciar esses conceitos de modo a diferenciá-la da geometria teórica, como cita Saito (2015):

> Diferentemente da geometria teórica (ou especulativa), que recorria à pura reflexão intelectual para estudar o espaço e os intervalos das dimensões, a practica geometriae tinha um apelo mais empírico, visto que estava sempre associada ao uso de instrumentos. Mas, ao contrário da *gromática*, a practica geometriae não era mera aplicação do conhecimento geométrico a problemas de natureza prática, mas um ramo da própria geometria que incorporava aspectos mais teóricos, fazendo parte das sete artes liberais. (SAITO, 2015, p. 144)

Saito (2015) ainda destaca que o escrito foi produzido antes da tradução árabe do *Elementos de Euclides*, portanto, redigido usando uma reunião de fragmentos antigos e dispersos dentro do ocidente latino. O escrito foi dividido em três partes: a altimetria, a planimetria e cosmimetria.

> A altimetria discorre sobre o uso de triângulos e círculos em problemas que envolvem medida e sua geometria… por sua vez, a planimetria basicamente versa sobre três técnicas de medida de comprimentos utilizando o astrolábio e a cosmimetria trata da figura esférica. [...] (SAITO, 2015, p. 148)

A obra de Hugo de São Victor teria sido o grande referencial geométrico da Europa ocidental até o século XIII, quando começaram a ser publicadas as traduções dos registros árabes.

Levando em consideração a nova organização social, política e religiosa do ocidente latino, Saito (2015) destaca a mudança etimológica da palavra grega *geometria* para a latina *mensurato terrae* (medição da terra), a fim de estreitar a relação com a *gromática* (arte de medir terras), disciplina a qual era destinada ao estudo da agrimensura até aquele momento.

A obra *Os Elementos de Euclides*, traduzida por Alderard de Bath (1080-1152) no século XII e posteriormente por Campo de Novara (1220-1296), roubaria as atenções do cenário medieval. Os ensinamentos de Euclides unidos a uma geometria que teria sido transmitida oralmente no século XIII, na qual eram apresentadas "construções geométricas" em cadernos de desenho por carpinteiros pedreiros e arquitetos e por fim, a já conhecida *Practica Geometriae de Hugo de São Victor* resultaram na tríade do conhecimento que culminaria no que hoje conhecemos como geometria moderna. (SAITO, 2015)

Ainda no Século XII, Saito (2015) cita o tratado *Practica geometria* (1220) de Leonardo de Pisa (Fibonacci, 1170-1250), como obra relevante do período, no qual ele apresenta conceitos basicamente ligados à agrimensura e baseados nos postulados e axiomas de Euclides.

Roque (2012) reafirma o pouco desenvolvimento em termos de descobertas no período da Baixa Idade Média. A autora foca em apresentar as substanciais inovações algébricas do período e seus impactos e aplicações nas práticas da época.

> Os algebristas dos séculos XIV e XV, ou mesmo os do século XVI, tinham alguma razão para desenvolver uma abordagem simbólica coerente? Parece que não. O tipo de matemática no qual estavam engajados não tornava essa necessidade urgente. Mesmo os mestres de ábaco com ambições enciclopédicas, como Pacioli, e mais tarde Tartaglia, não encontram estímulo para tal sistematização na matemática praticada nas universidades ou no meio dos pensadores humanistas. Ao contrário, a aspiração de conectar sua matemática ao ideal euclidiano os fez reinserir provas geométricas na tradição algébrica, que já tinha se livrado dessa influência, retardando a compreensão de que uma argumentação puramente aritmética, ou algébrica, poderia ser considerada legítima sem o auxílio da geometria. [...] (ROQUE, 2012, p. 240)

Roque (2012) ainda cita a discussão da legitimidade da argumentação algébrica, que para os matemáticos da época dispensava os argumentos geométricos.

Katz *et al.* (2016) reforça que entre os séculos XI e XV, além da cultura católica dominante no período medieval, outras duas culturas produziram escritos matemáticos na região: as culturas hebraica e islâmica, com trabalhos oriundos de registros das matemáticas gregas e indiana. Durante o governo de Al-Ḥakam II, (961–977), foram escritos os primeiros trabalhos matemáticos em *El-Andalus* (Espanha do mundo árabe). Nessa mesma época, em Provença, os judeus começaram a desenvolver plenamente seu interesse pela matemática.

O autor conta que por meio de suas descobertas, matemáticos contribuíram para a riqueza e o prestígio do reino, que cresceram em valor ao possuir acesso a práticas que facilitam o desenvolvimento da sociedade. Destacam-se os termos *Muhandis e faraḍī*: a primeira denota alguém envolvido com a medição; e o segundo denota um especialista em aritmética.

Segundo Katz *et al.* (2016), há pouca evidência na Espanha de que houve alguma restrição religiosa à prática da matemática. Logo, os motivos que levavam um tópico a ser estudado e aplicado estavam ligados às razões práticas, como a disponibilidade de professores ou simplesmente com as inclinações de um determinado matemático.

Com relação aos problemas geométricos, há uma sucessão de tratados e livros que relatam os mais diversos problemas e conteúdos. Citaremos alguns problemas, teoremas e tratados encontrados.

Tais problemas foram reconstruídos, com base nas demonstrações citadas pelos autores, no software *GeoGebra*, o qual reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. "Ter domínio sobre este software foi fundamental para melhor compreender cada passo da resolução dos problemas estudados, simplificando a reprodução geométrica dos mesmos." [...] (GOMES, 2012, p. 11)

Problema 1: Se lhe disserem: "Adicionamos os lados e temos a área de cento e quarenta, quais são os lados?" (KATZ *et al.*, 2016, p. 452, tradução nossa).

Resolução:[4]

Soma dos lados: 4; Pegue a metade do resultado e multiplique com ela mesma: 4

Adicione com a área: 144; Calcule a raiz: 12; "e tire dela metade do número de lados e o restante é igual a cada um de seus lados."

10 e 14

Utilizando a simbologia atual, dado que cada lado é uma unidade de medida, notamos que se trata de uma região quadrilátera e sua resolução pode ser descrita por:

$\boldsymbol{l = lado\ de\ a\ e\ A =}$ á$\boldsymbol{rea\ e\ x\ = \frac{l}{2} \times \frac{l}{2} + A\ ent}$ã$\boldsymbol{o,\ \sqrt{x} - \frac{l}{2}}$ é $\boldsymbol{um\ dos\ lados\ e}$ $\boldsymbol{\sqrt{x} + \frac{l}{2}\ \ o\ outro}$..

Note que, no campo da agrimensura, a aplicabilidade do método é limitada, visto que a medida dos lados da região poderá ter valores irracionais.

No tratado de Ibn al-Samḥ (984-1035) foi descrito o "triângulo de movimento", construído fixando um lado de um triângulo e movendo o vértice que une os outros dois lados de tal forma que sua soma seja sempre igual, a medida em sua interseção se move, contornando em torno do lado fixado, encontramos a elipse, e, partir disto foi possível determinar várias razões entre as elipses, seus círculos inscritos e circunscritos e os eixos maior e menor. (KATZ *et al.*, 2016)

Katz *et al.* (2016) também cita Al-Mu'taman Ibn Hūd que se tornou rei de Zaragoza, um dos pequenos reinos islâmicos da península, em 1081. Sua obra é uma mistura de matemática de fontes gregas e árabes, bem como o que parecem ser algumas contribuições originais do próprio Ibn Hūd. Ele teria, a seu modo, provado os teoremas de Heron e Ceva, este último se pensava ter sido originado pelo italiano Giovanni de Ceva em 1678.

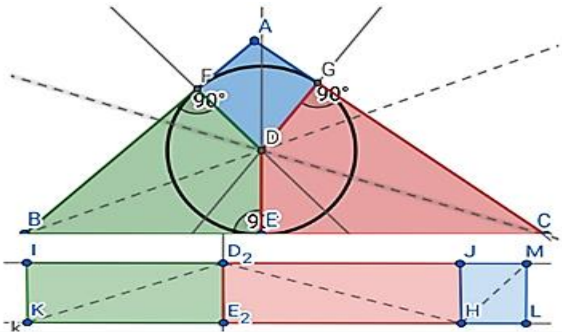
Teorema de Heron (Figuras 1, 2 e 3): Dado um triângulo $\boldsymbol{ABC}$, de medidas $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$; $\mathbf{BC} = \mathbf{b}$; $\mathbf{CA} = \mathbf{c}$; $\mathbf{P}$ é a metade da soma de seus lados, o quadrado da área

[4] Resolução descrita conforme apresentado no texto original.

de $\mathbf{ABC}$ é definido por: $\mathbf{P}(\mathbf{P}-\mathbf{a})(\mathbf{P}-\mathbf{b})(\mathbf{P}-\mathbf{c})$. (KATZ *et al.*, 2016, p. 479, tradução nossa).

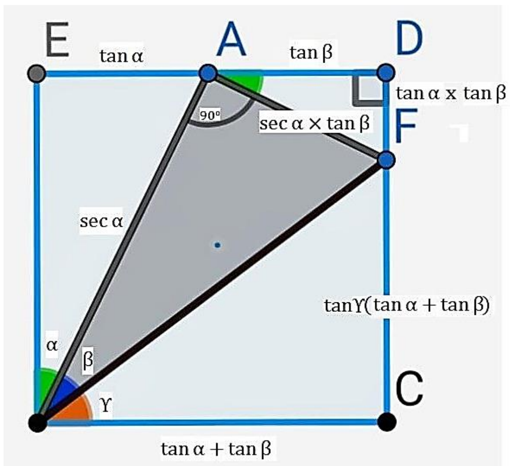
Demonstração:

Figura 1. Lema 1: A área de um triângulo é igual ao produto da medida do raio da sua circunferência inscrita pelo seu semiperímetro.



Fonte: Construído no software *GeoGebra.*

Figura 2. Lema 2: Se $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ são medidas positivas de três ângulos tais que $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$, então: $\boldsymbol{tan\alpha}.\boldsymbol{tan\beta}+\boldsymbol{tan\gamma}.\boldsymbol{tan\alpha}+\boldsymbol{tan\gamma}.\boldsymbol{tan\beta}=\mathbf{1}$.



Fonte: Construção com uso do software *GeoGebra*

Ao satisfazer as igualdades entre o semiperímetro $\boldsymbol{P}$ e as medidas do retângulo gerado em Lema 1 e aplicando o Lema 2 aos ângulos do triângulo $\boldsymbol{ABC}$ dado, chegamos a relação que conclui o teorema de Heron.

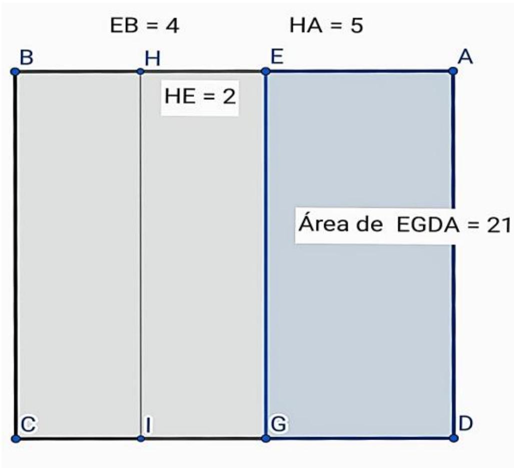
Segundo Katz (2016), a motivação do povo Judeu, com a finalidade de desenvolver o conhecimento matemático, teve origem religiosa. A fim de praticar os ensinamentos do Torá e tendo visto que a maioria dos estudiosos contemporâneos na Espanha e na Provença tinha conhecimento limitado, os judeus teriam desenvolvido essa habilidade a fim atender de forma justa essa necessidade da sociedade da época.

Katz (2016) apresenta como um dos primeiros matemáticos judeus que conhecemos Abraham bar Ḥiyya de Barcelona (1065-1145), o qual foi líder comunitário e estudioso. Sua principal obra é *O Tratado da Medição de Áreas e Volumes*, na qual estão inseridos os problemas a seguir.

Problema 1: “Dada um quadrilátero, se você tira do número de sua área o número dos seus quatro lados, e ficam com 21 côvados de sua área: qual é a área e qual é o número de cada lado do quadrado?” (Tradução livre do artigo de Katz 2016, p. 11, tradução nossa).

Resolução: Dado $\mathbf{ABCD}$, desprezando a região $\boldsymbol{BE}$ de lado 4, temos a regiã $\boldsymbol{EGDA}$ de área 21. Então ao definir $\boldsymbol{H}$ (ponto médio) e usando elementos ele mostra que quadrado $\boldsymbol{HA}$ é a soma das áreas $\boldsymbol{EAGD} + \boldsymbol{HA} = \mathbf{25}$, que implica $\boldsymbol{HA} = \mathbf{5}$. Logo $\boldsymbol{BA} = \mathbf{7}$.

Figura 3. Construção geométrica do Problema 1

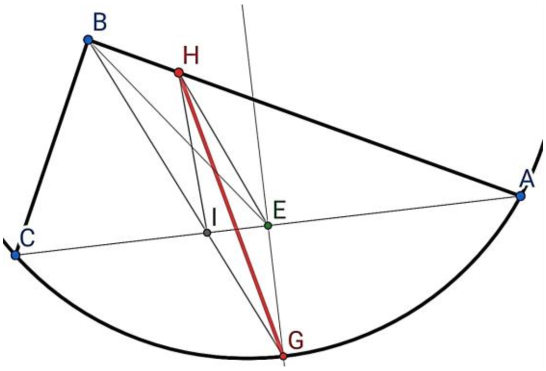


Fonte: Construído no software *GeoGebra*, baseado na demonstração de KATZ (2016, p. 11)

Problema 2: Sobre divisão de campos, Abraham começa com uma região delimitada por um arco de um círculo e duas linhas

> retas, nenhuma das quais são raios. Seu objetivo é encontrar uma linha reta dividindo a região ao meio.
> Resolução: Dado arco ABC, admita E ponto médio de AC, e EG perpendicular a AC, tal que G é ponto do arco dado. Seja I a intersecção entre AC e BG, desenhe HE paralelo a BG, tal que H pertence a BA, logo GH divide o arco ao meio. Prova: Note BE divide o triângulo ABC na metade e EG divide a região $AECG$, mas BHE e GHE são iguais, o que implica a região AHG como a soma do triângulo ABE com a região AEG, ou seja, metade da região $ABCG$ que é o arco ABC. (KATZ, 2016, p. 12, tradução nossa).

Figura 4. Construção geométrica do Problema 2



Fonte: Construído no software GeoGebra, baseado na demonstração de KATZ (2016, p. 12)

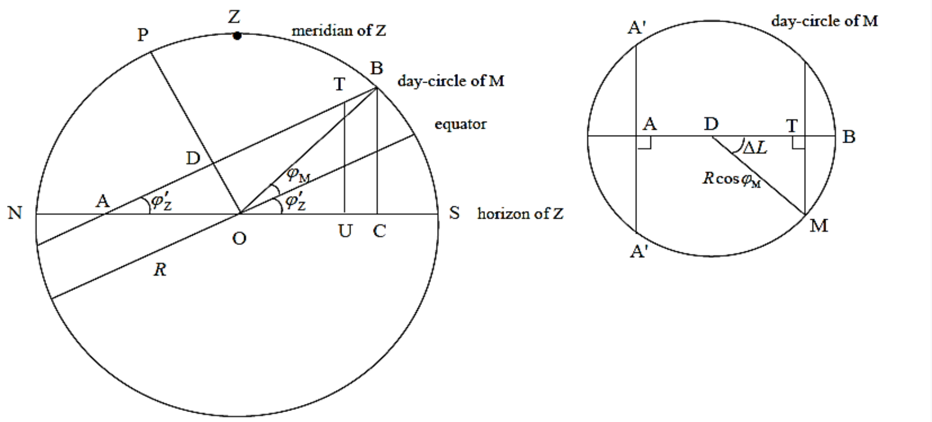
Segundo o artigo de Schwartz (2010), um dos grandes problemas do mundo árabe foi identificado como *Al-qibla*, que significa: “a busca pela direção sagrada, como era conhecida a direção de oração a Meca, local sagrado para a religião muçulmana."[...] (SCHWARTZ, 2010, p. 20) Ele teria desempenhado um papel importante em estimular o surgimento da trigonometria esférica como uma subdisciplina da matemática madura.

O cálculo de Al-Marrākushi teria sido uma das várias soluções encontradas para determinar o *Al-qibla* ao longo do período, segundo o artigo de Schwartz (2010) por volta de 1380, no Cairo. A seguir segue sua resolução, retirada do artigo citado.

> Problema 4: Sejam Z e M os zênites do observador e Meca, respectivamente, e R o raio da esfera celeste. Se o arco de grande círculo ZM é estendido até o horizonte de Z, então o comprimento angular dessa extensão é chamado de altitude h de M acima do horizonte de Z. Queremos determinar H ou,

> igualmente, o semiarco $\boldsymbol{R.sin(h)}$ de $\boldsymbol{M}$ ao plano do horizonte de $\boldsymbol{Z}$.
> Solução: Pelo círculo meridiano de $\boldsymbol{Z}$ passam três planos importantes: o do horizonte de $\boldsymbol{Z}$, o do equador celeste e o do “círculo diurno” de $\boldsymbol{M}$. Para definir $\boldsymbol{T}$, é preciso esboce o círculo diurno com seu centro $\boldsymbol{D}$, sua interseção $\boldsymbol{B}$ com o meridiano de $\boldsymbol{Z}$ e suas duas interseções $\boldsymbol{A}$' com o horizonte de $\boldsymbol{Z}$, que são análogas aos pontos do nascer e do pôr do sol. $\boldsymbol{T}$ é o ponto no raio $\boldsymbol{BD}$ que tem a mesma altura que $\boldsymbol{M}$ acima do plano do horizonte de $\boldsymbol{Z}$. Assim, sua altura $\boldsymbol{TU}$ mede a quantidade procurada $\boldsymbol{R.sin(h)}$.
> (SCHWARTZ, 2010, p. 22, tradução nossa).

Figura 5. Construção geométrica do problema 4



Fonte: Schwartz (2010, p. 22)

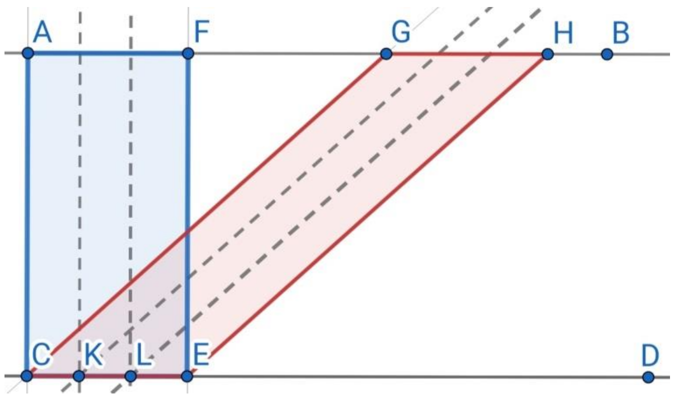
Voltando ao ocidente, o desenvolvimento das universidades medievais, destaca um grupo de matemáticos conhecido como Oxford Calculadores, associadas ao Merton College de Oxford durante o século XIV. Segundo Katz (2016), eles estando envolvidos no ensino universitário, tiveram que descobrir como explicar conceitos difíceis para os alunos, com o método básico de ensino a criação de disputas com participação de mestres e alunos. Assim, eles se concentraram no argumento lógico, baseado nos princípios de Aristóteles, e então o argumento era usado para tentar determinar o que Aristóteles quis dizer em suas discussões de problemas físicos. Um dos primeiros mertonianos[5] Thomas Bradwardine (1290-1349), teria demonstrado sua versão sobre continuidade que era amplamente discutida desde Platão. Para ele: “Nenhum

[5] Denominação dada a todo matemático associado ao Merton College de Oxford.

continuum é feito de átomos. Cada contínuo é composto de um número infinito de contínuos da mesma espécie que ele, isto é, cada linha é composta por um número infinito de linhas” (KATZ *et al.*, 2016, p.180). Segue a demonstração.

> Sejam AB e CD retas paralelas, tal que F, G e H pertencem a AB e E pertence a CD, sendo o paralelogramo $AFCE$ Um retângulo sobre a mesma base CD existe outro paralelogramo $CEGH$, constituído por lados que são tão maiores quanto você queira se comparados com as medidas dos lados de $AFCE$. Então todas as linhas de $CEGH$ que são desenhadas de todos os pontos de CE para os pontos opostos de GH são iguais em número aos pontos, e consequentemente a todas as perpendiculares de $AFCE$ que são traçadas a partir dos mesmos pontos para os pontos opostos. Contudo, em $CEGH$ eles são mais longos que em $AFCE$. Portanto, $CEGH$ é maior que $AFCE$. Mas de acordo com I 36 dos Elementos de Euclides, os paralelogramos são iguais. (KATZ *et al.*, 2016, p. 180, tradução nossa).

Figura 6. Construção de Bradwardine.



Fonte: Construído no software GeoGebra, baseado na demonstração de KATZ *et al.* (2016, p. 180)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das considerações deste trabalho, reafirmamos a importância do estudo da história da matemática e em especial o contexto sob o qual ela estava inserida no período da Baixa Idade Média. Podemos concluir que existiam matemáticos nas três principais culturas medievais e fica evidente que os conteúdos produzidos são oriundos de conhecimentos obtidos na cultura hindu-árabe e na obra *Elementos de Euclides*.

Havia interesse definitivo em geometria, tanto geometria prática e geometria bastante teórica, contudo esse interesse era amplamente superior na região oriental da Europa. O resgate dos estudos geométricos no ocidente europeu teria início no fim da Baixa Idade Média dentro das universidades que se encontravam em contínua expansão. Junto com a geometria, havia também a trigonometria, importante para a astronomia, que por sua vez era necessário para fins religiosos.

Deste modo, vimos que os problemas abordados no período tinham fins práticos e teóricos. A busca pelo conhecimento, era motivada tanto pela busca por respostas para problemas enfrentados, como pela finalidade de compreender e reproduzir o conhecimento já desenvolvido e registrado por matemáticos do passado, a fim de transmitir esses conhecimentos e desenvolver novos conceitos e teorias.

Por fim, percebe-se a influência cultural do meio como fator determinante para o modo como a matemática se desenvolveu em cada região, mostrando que ela não é uma disciplina livre de cultura.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.
Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf

DELLA NINA, C. T. et. al; PORTANOVA,R. (Org.) **Um currículo de matemática em movimento.** Porto Alegre, RS: EDIPUCRS, 2005.

GOMES, E. Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de Geometria: Reflexão da prática na escola. Uruguai: **Conferência Latinoamericana de GeoGebra**, 2012. Disponível em: http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/procesadas1443685856/67.pdf

KATZ, V. J. **The mathematical cultures of Medieval Europe. History and Pedagogy of Mathematics**. Montpellier: Hal, 2016.
Disponível em: https://hal.science/hal-01349229v1/document Acesso em: 09 set. 2022.

KATZ, V. J; FOLKERTS, M.; HUGHES, B.; WAGNER, R.; BERGGREN, J. L. **Sourcebook in the mathematics of medieval Europe and North Africa.** Princeton: Princeton University Press, 2016.

MOTTA, C. D. V. B. Resumo: o papel psicológico da História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem. In: **Proceedings of the 1th Simpósio Internacional do Adolescente**, 2005, São Paulo (SP) [online]. Disponível em: http://www.proceedings.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=MSC0000000082005000200056&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 10 jan. 2023.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAITO, F. **História da matemática e suas reconstruções contextuais**. Livraria da Física, 2015.

SCHWARTZ, R. K. *Al-qibla* and the New Spherical Trigonometry: The Examples of al-Bīrūnī and al-Marrākushī. **Conference: Tenth Maghrebian Colloquium on the History of Arabic Mathematics** (COMHISMA10). Tunis, Tunisia, 2010. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/270903758_Al-qibla_and_the_New_Spherical_Trigonometry_The_Examples_of_al-Biruni_and_al-Marrakushi_Al-qibla_et_la_Nouvelle_Trigonometrie_Spherique_Les_Exemples_d'al-Biruni_et_al-Marrakushi. Acesso em: 12 out. 2022.