UM ESTUDO SOBRE AS OPERAÇÕES ELEMENTARES DE MATRIZES PRESENTES NA OBRA "A MEMOIR ON THE THEORY OF MATRICES" DE ARTHUR CAYLEY

Kleyton Vinicyus Godoy[1]

Erlizei Luiz Junior[2]

RESUMO

Nos dias de hoje a ideia de matriz está relacionada ao conceito de tabelas, contudo, ao olharmos historicamente poderemos verificar que a ideia de matriz se originou associada a representação de sistemas lineares. Pretendemos realizar um estudo das definições e procedimentos para operações elementares entre matrizes (adição de matrizes, multiplicação de matriz por escalar e multiplicação de matriz por matriz) presentes na obra *A Memoir on the Theory of Matrices*, escrita pelo matemático Arthur Cayley (1821-1895) e publicada na *Philosophical Transaction of Royal Society of London* no ano de 1858. A importância histórica dessa obra, se dá pelo fato de ter sido uma das primeiras publicações no que se refere à Teoria das Matrizes. Constatamos que a definição de matriz foi apresentada como uma forma de abreviar os coeficientes das equações que compõem um sistema linear. Dessa forma, concluímos que por meio da concepção de Cayley, ao realizarmos operações entre matrizes, estamos efetuando operações entre sistemas lineares.

Palavras-chave: Matrizes. Arthur Cayley. História da Matemática.

INTRODUÇÃO

Neste artigo apresentamos parte dos resultados de um Trabalho de Conclusão de Curso em desenvolvimento a nível de Graduação no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Lavras. De acordo com o historiador Eves (2011), além dos trabalhos de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), os matemáticos Arthur Cayley (1821-1895) e James Joseph Sylvester (1814-1897) foram os principais matemáticos que contribuiram para o desenvolvimento da Teoria das Matrizes. Contudo, destacamos que neste trabalho focamos somente nas definições presentes na obra *A Memoir on the*

[1] Docente no Departamento de Educação em Ciências Físicas e Matemática da Universidade Federal de Lavras (UFLA). E-mail: klegodoy@gmail.com.

[2] Graduando em Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Lavras (UFLA). E-mail: erlizei.junior1@estudante.ufla.br.

Theory of Matrices (Uma memória sobre a Teoria das Matrizes), publicada na *Philosophical Transaction of Royal Society of London* no ano de 1858, de autoria do matemático britânico Arthur Cayley (1821-1895).

Consideramos que o estudo dessa obra, sob uma perspectiva da História da Matemática se faz importante, uma vez que, nela está contida uma das primeiras definições e procedimentos das operações elementares entre matrizes (adição de matrizes, multiplicação de matriz por escalar e multiplicação de matriz por matriz). De acordo com Barros (2012), as fontes diretas são aquelas que não possuem intermediações nas informações, ou seja, são aquelas fontes que iremos estudar a partir da obra original, portanto, a referida obra de Cayley (1858) será nossa fonte direta para realização deste artigo.

Inicialmente, buscamos verificar se haviam produções no Brasil que abordassem o tema de matrizes sob uma perspectiva histórica e para isso, consultamos os Anais das edições do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) e sites como o Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat) e periódicos CAPES, e encontramos algumas obras: Bernardes e Roque (2016), Lima, Pereira e Chaquiam (2018), Matos e Nunes (2019) e Bernardes (2019).

De acordo com Bernardes e Roque (2016, p.11), a "noção de matriz foi utilizada por Cayley, pela primeira vez, no artigo *Remarques sur la notation des functions algébriques*", publicado em 1855. As autoras apresentam dois episódios referentes à matrizes: a introdução do termo matriz por Sylvester e a elaboração do cálculo simbólico formulado por Cayley. Elas consideram os problemas de pontos de contato entre duas cônicas como objetos sistêmicos para investigação do primeiro episódio, enquanto a noção de matriz foi o objeto do segundo episódio. Ao analisar os dois objetos, identificaram os determinantes como técnicas sistêmicas comum aos dois episódios.

Lima, Pereira e Chaquiam (2018) realizam uma pesquisa bibliográfica contendo algumas passagens cronológicas dos matemáticos contemporâneos a Cayley, traços biográficos a respeito do matemático e uma breve evolução do conceito de matrizes no decorrer do tempo. Bernardes (2019) apresenta uma proposta que visa correlacionar o ensino de matemática e a História da Matemática, e a partir do uso da teoria de Sfard (2008) em relação as regras do nível do objeto e regras metadiscursivas ou metarregras, obteve resultados em sua pesquisa que apontam a potencialidade da utilização de fontes históricas em sala de aula. Matos e Nunes (2019), apoiados pela Teoria Antropológica do Didático, realizaram uma análise epistemológica das Matrizes de cunho histórico com o intuito que os professores ainda em formação inicial de Matemática, possam (re)construir as tarefas que não estão presentes nos livros didáticos. Desta forma, estes futuros professores por meio de conhecerem a gênese das propriedades da Teoria das Matrizes, tenham elementos para repensar o ensino de matrizes no contexto escolar.

O diferencial de nosso artigo em relação aos citados anteriormente, se dá pelo fato de explorarmos e dar ênfase às propriedades enunciadas por Cayley (1858) no que refere-se às regras para operação de adição de matrizes, multiplicação de matrizes por escalar e composição de matrizes. Sabemos que no decorrer da História da Matemática, as matrizes foram surgir somente em meados do século XIX, posterior ao conceito de Determinantes e que a noção e estratégias de resoluções de sistemas lineares são conhecidas por civilizações desde a Antiguidade, porém, neste artigo iremos nos limitar essencialmente na obra *A Memoir on the Theory of Matrices* e assumimos o risco de que nosso artigo possa passar uma visão tradicional de que o conhecimento matemático é apresentado como "um todo harmonioso, os diferentes assuntos se encadeando logicamente e sendo desenvolvidos progressiva e ordenadamente" (PAVANELLO e NOGUEIRA, 2006, p.31).

A Teoria das Matrizes

Nesta seção, apresentamos algumas definições presentes na obra *A Memoir on the Theory of Matrices*, publicada originalmente em 1858 na *Philosophical Transaction of Royal Society of London* pelo matemático Arthur Caley. Cayley (1858) definiu Matriz do seguinte modo:

> O termo matriz pode ser usado em um sentido mais geral, mas na presente memória eu considero apenas as matrizes quadradas e retangulares, e o termo matriz usado sem qualificação é entendido como uma matriz quadrada; neste sentido restrito, diz-se que um conjunto de quantidades dispostas na forma de um quadrado, por exemplo, é dito ser uma matriz. (CAYLEY, 1858, p.17, tradução nossa)[3].

Por meio da Figura 1, podemos ver que uma matriz pode ser representada[4] da seguinte maneira:

Figura 1: Representação dos elementos de uma matriz de ordem 3 por Cayley

$$\left(\begin{array}{ccc} a\,, & b\,, & c \\ a'\,, & b'\,, & c' \\ a''\,, & b''\,, & c'' \end{array}\right|$$

Fonte: Cayley (1858, p.17)

Cayley comenta que o conceito de matriz surge naturalmente como uma forma de notação abreviada para representar um conjunto de equações de um sistema linear (Figura 2):

Figura 2: Representação de uma matriz de ordem 3 determinada por um

---

[3] No original: *The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, e.g., is said to be a matrix.*

[4] O matemático assume que para a escrita da Memória das Matrizes, ele irá definir os conceitos utilizando-se de matrizes de ordem 3, mas ressalta que as definições podem ser aplicadas a uma matriz de ordem qualquer.

sistema linear x, y e z por Cayley

$$\left(\begin{array}{ccc} a\,, & b\,, & c \\ a'\,, & b'\,, & c' \\ a''\,, & b''\,, & c'' \end{array}\right)(x,\ y,\ z)$$

Fonte: Cayley (1858, p.18)

De tal modo que, podemos obter um conjunto de funções lineares (Figura 3) expresso por:

Figura 3: Representação de funções lineares obtidas do sistema de uma matriz de ordem 3 por Cayley

$$\big((a,\ b,\ c)(x,\ y,\ z),\ \ (a',\ b',\ c')(x,\ y,\ z),\ \ (a'',\ b'',\ c'')(x,\ y,\ z)\big)$$

Fonte: Cayley (1858, p.18)

Assumindo que estas funções podem ser chamadas de (X, Y, Z), temos então o sistema linear de ordem 3 representado em notação matricial (Figura 4):

Figura 4: Sistema linear de ordem 3 representado em notação matricial

$$(\mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} a\,, & b\,, & c \\ a'\,, & b'\,, & c' \\ a''\,, & b''\,, & c'' \end{array}\right)(x,\ y,\ z),$$

Fonte: Cayley (1858, p.17)

É possível notar que os coeficientes do sistema linear, são os elementos que compõem a matriz. Enquanto x, y e z são, o que denominamos atualmente como as incógnitas do sistema; e X, Y e Z são os valores que satisfazem o sistema. Portanto, podemos concluir que para Arthur Cayley, a representação de uma matriz (Figura 1) é uma forma abrevida de um sistema linear, na notação de

Cayley (1858). Observe que X é o resultado da primeira linha com (x, y, z), Y resulta dos elementos da segunda linha com (x, y, z) e Z é obtido pelos elementos da terceira linha com (x, y, z) :

$$X = ax + by + cz$$
$$Y = a'x + b'y + c'z$$
$$Z = a''x + b''y + c''z$$

Uma observação apontada pelo matemático no decorrer da obra, refere-se ao fato de enfatizar a importância de abordar as matrizes quadradas ao invés das matrizes retangulares. Para Cayley (1858), o estudo da:

> teoria das matrizes retangulares parece muito menos importante do que o de matrizes quadradas, e eu não fui além de ter mostrado como algumas das noções aplicáveis a elas podem ser estendidas a matrizes retangulares (p.18, tradução nossa)[5].

A justificativa para tal afirmação se dá pelo fato de que ao trabalhar com matrizes de mesma ordem, as operações com matrizes são equivalentes ao comportamento do manuseio com grandezas algébricas comuns. Todavia, o mesmo não pode ser dito em relação a matrizes retangulares, visto que a depender da quantidade de linhas e colunas, não será possível realizar operações entre esses tipos de matrizes.

Alguns tipos de matrizes

Ademais, do mesmo modo que nos dias de hoje os professores de matemática, em geral, antes de explicar operações com matrizes apresentam alguns exemplos de tipos de matrizes, o matemático Arthur Cayley segue a mesma proposta na escrita de sua obra. Cayley (1858, p.18, tradução nossa) denota que

[5] No original: *theory of rectangular matrices appears much less important than that of square matrices, and I have not entered into it further than by showing how some of the notions applicable to these may be extended to rectangular matrices*.

“As quantidades $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ serão identicamente zero, se todos os termos da matriz forem zero, e podemos dizer que é a matriz zero[6]”.

Na Figura 5, vemos que todos os elementos da matriz representada são iguais a zero. Por meio das definições apresentadas pelo matemático, podemos assumir que esta matriz é a forma abreviada de um sistema linear do tipo representado na Figura 4, logo, nos dias de hoje, seria o mesmo que dizermos que a matriz zero ou matriz nula, é uma representação das possiblidades de solução de um sistema linear trivial.

Cayley (1858, p.18, tradução nossa) define que se os valores de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ “sejam identicamente iguais a $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, (...) esta é dita ser a matriz unidade[7]”.

Figura 5: Representação da matriz zero (à esquerda) e matriz unidade (à direita) por Cayley[8]

$$\begin{array}{|ccc|} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{|ccc|} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{array}$$

Fonte: Cayley (1858, p.18)

Por meio da Figura 5, vemos que Arthur Cayley denomina aquelas matrizes que possuem as diagonais principais com todos os elementos iguais a um, como matriz unidade. Novamente, entendendo que esta matriz é a representação da forma abreviada de um sistema linear representado na Figura 5, uma vez que os valores de $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{1}; \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{1}$ e $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z} = \boldsymbol{1}$, podemos estabelecer relações com a denominação utilizada nos dias de hoje, matriz identidade, do ponto de vista da

[6] No original: *The quantities* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ *will be identically zero, if all the terms of the matrix are zero, and we may say the is the matrix zero*.
[7] No original: *will be identically equal to* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$*, (…) this is said to be the matrix unity.*
8 Cayley (1858) comenta que na maioria das vezes, a matriz zero pode ser simplesmente simbolizada por 0 e a matriz unidade por 1.

representação matricial de um sistema linear. Vale ressaltar, que para que essa equação se mantenha verdadeira, o sistema é do tipo:

$$ax + 0y + 0z = 1$$
$$0x + b'y + 0z = 1$$
$$0x + 0y + c''z = 1$$

Adição e Subtração de Matrizes

Uma vez estabelecido alguns tipos de matrizes especiais, Cayley parte para a aplicação destes resultados ao definir propriedades de operações com matrizes. Na notação atual, enfatizamos que só é possível realizar a soma e subtração de matrizes desde que possuam o mesmo tipo, sejam elas quadradas ou retangulares. Assim sendo, realizamos a soma ou subtração de matrizes operando cada elemento com o seu respectivo correspondente entre as matrizes. Como Cayley (1858) utiliza o conceito de matrizes para simplificar a representação de sistemas lineares, a ideia de soma e subtração de matrizes segue uma noção de que ao operarmos duas matrizes, estamos realizando uma operação entre dois sistemas. Desta forma, vemos na Figura 6, que o matemático considera os sistemas em relação de $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ para obter os valores de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ e $(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}', \boldsymbol{Z}')$:

Figura 6: Representação em notação matricial dos sistemas lineares para obter $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) + (\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}', \boldsymbol{Z}')$

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z), \quad (\mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{Z}') = \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

Fonte: Cayley (1858, p.19)

Assim, para descrever a soma de matrizes entre $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ e $(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}', \boldsymbol{Z}')$, Cayley apresenta a seguinte regra:

Figura 7: Regra da adição entre os elementos de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ e $(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}', \boldsymbol{Z}')$

$$(\mathrm{X}+\mathrm{X}',\ \mathrm{Y}+\mathrm{Y}',\ \mathrm{Z}+\mathrm{Z}') = \left(\begin{array}{ccc} a+\alpha, & b+\beta, & c+\gamma \\ a'+\alpha', & b'+\beta', & c'+\gamma' \\ a''+\alpha'', & b''+\beta'', & c''+\gamma'' \end{array} \right)(x, y, z)$$

Fonte: Cayley (1858, p.19)

Os resultados de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ e $(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}', \boldsymbol{Z}')$ apresentados na Figura 7, são obtidos por meio de considerar os elementos que ocupam as mesmas posições nas matrizes em relação aos valores desconhecidos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$:

$$X + X' = (a + \alpha)x + (b + \beta)y + (c + \gamma)z$$
$$Y + Y' = (a' + \alpha')x + (b' + \beta')y + (c' + \gamma')z$$
$$Z + Z' = (a'' + \alpha'')x + (b'' + \beta'')y + (c'' + \gamma'')z$$

Deste modo, a aplicação deste método nos leva ao resultado da adição entre matrizes do mesmo tipo (Figura 8), e podemos dizer, por meio da definição de Cayley (1858), que uma soma de matrizes é o resultado entre a soma dos coeficientes de dois sistemas lineares:

Figura 8: Resultado da adição entre os elementos de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ e $(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}', \boldsymbol{Z}')$

$$\left(\begin{array}{ccc} a+\alpha, & b+\beta, & c+\gamma \\ a'+\alpha', & b'+\beta', & c'+\gamma' \\ a''+\alpha'', & b''+\beta'', & c''+\gamma'' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array} \right)$$

Fonte: Cayley (1858, p.19)

Analogamente, este método também vale para subtração entre matrizes. Cayley (1858) elenca quatro propriedades relativas à soma de matrizes:

- Dado que $L + M = M + L$, a operação de matrizes é comutativa.

- Além disso, $(L+M)+N = L+(M+N) = L+M+N$, deste modo, a operação de matrizes é associativa.
- Uma matriz não é alterada ao ser adicionada ou subtraída em relação à matriz zero, isto é, $M \pm 0 = M$. A equação $L = M$, expressa que as matrizes L e M são iguais, de modo que pode ser escrita na forma $L - M = 0$, ou seja, a matriz zero é o resultado da diferença entre duas matrizes iguais;
- A equação $L = -M$, pode ser escrita na forma $L + M = 0$, que indica que a soma das matrizes L e M resultam na matriz zero, isto é, estas matrizes são opostas entre si, "em outras palavras, uma matriz cujos termos são iguais, mas de sinais opostos aos termos de uma dada matriz, diz-se que é oposta a matriz dada (CAYLEY, 1858, p.19, tradução nossa)[9].

Multiplicação de Matriz por uma quantidade única (escalar)

Em relação ao que denominamos atualmente por multiplicação de matriz por escalar, Cayley (1858) considera o seguinte sistema linear multiplicado por uma quantidade única $\boldsymbol{m}$:

Figura 9: Sistema linear em função de $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ multiplicado por $\boldsymbol{m}$

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \left(\begin{array}{|ccc|} a\,, & b\,, & c \\ a'\,, & b'\,, & c' \\ a''\,, & b''\,, & c'' \end{array} \right)(mx,\ my,\ mz)$$

Fonte: Cayley (1858, p.19)

Este mesmo sistema (Figura 9), pode ser escrito na forma expressa na Figura 10:

[9] No original: *in other words, a matrix the terms of which are equal but opposite in sign to the terms of a given matrix, is said to be opposite to the given matrix.*

Figura 10: Forma alternativa de expressar a multiplicação de $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ por $\boldsymbol{m}$

$$(X, Y, Z) = m\left(\begin{array}{|ccc|} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z) = \left(\begin{array}{|ccc|} ma, & mb, & mc \\ ma', & mb', & mc' \\ ma'', & mb'', & mc'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

Fonte: Cayley (1858, p.19)

$$X = m(ax + by + cz) = max + mby + mcz$$

$$Y = m(a'x + b'y + c'z) = ma'x + mb'y + mc'z$$

$$Z = m(a''x + b''y + c''z) = ma''x + mb''y + mc''z$$

Portanto, Cayley define uma regra para multiplicar uma matriz por uma quantidade única (escalar) conforme apresentamos na Figura 11:

Figura 11: Regra da multiplicação por escalar para obter os valores de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$

$$m\left(\begin{array}{|ccc|} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{|ccc|} ma, & mb, & mc \\ ma', & mb', & mc' \\ ma'', & mb'', & mc'' \end{array}\right)$$

Fonte: Cayley (1858, p.20)

O matemático inglês define que “o multiplicador $\boldsymbol{m}$ pode ser escrito antes ou depois da matriz, e a operação é, portanto, comutativa[10]” (CAYLEY, 1858, p.20, tradução nossa). Deste modo, pode-se concluir ainda que $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}) = \boldsymbol{mL} + \boldsymbol{mM}$, isto é, a operação de uma matriz por uma quantidade única é distributiva. Cayley observa que se as matrizes $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{mL}$, em particular, se $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{1}$ elas serão iguais, enquanto que se $\boldsymbol{m} = -\boldsymbol{1}$, elas serão opostas.

[10] No original: *The multiplier m may be written either before or after the matrix, and the operation is therefore commutative.*

Multiplicação de Matriz por Matriz

Dada as equações (Figura 12), Cayley busca apresentar uma regra para multiplicação de matriz por matriz, o que ele denomina de composição de matrizes. Vale relembrarmos que, dado que o matemático se utiliza das matrizes para simbolizar uma notação abreviada de sistemas lineares, uma composição de matriz é na verdade uma composição entre sistemas lineares, e, para ser mais preciso, a multiplicação de matrizes é resultante da composição das transformações lineares aplicadas nestes sistemas.

Figura 12: Equações para mostrar a regra para composição de matrizes

$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z), \qquad (x, y, z) = \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)(\xi, \eta, \zeta),$$

Fonte: Cayley (1858, p.20)

A partir das equações iniciais, podemos obter uma transformação linear em função de (ξ, η, ζ). A Figura 13 mostra o resultado da aplicação desta transformação:

Figura 13: Aplicação da Transformação Linear em função de (ξ, η, ζ)

$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{ccc} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{array}\right)(\xi, \eta, \zeta) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)(\xi, \eta, \zeta),$$

Fonte: Cayley (1858, p.20)

Observe que os valores de (x, y, z) dado na equação original (Figura 12), foi transformado linearmente em relação à uma composição de coeficientes em função de (ξ, η, ζ). Esta composição de coeficientes é o resultado da multiplicação de matrizes que pode ser expressa pelos elementos (Figura 14):

Figura 14: Elementos resultantes da composição de matrizes

$$\left(\begin{array}{ccc} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{array}\right)$$

Fonte: Cayley (1858, p.20)

Contudo, os elementos da Figura 14 são obtidos por uma regra de composição ou multiplicação (Figura 15) entre duas matrizes:

Figura 15: Regra da multiplicação/composição entre duas matrizes

$$\left(\begin{array}{ccc} (a, b, c \,)(\, \alpha, \alpha', \alpha''), & (a, b, c \,)(\, \beta, \beta', \beta''), & (a, b, c \,)(\, \gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a', b', c' \,)(\, \alpha, \alpha', \alpha''), & (a', b', c' \,)(\, \beta, \beta', \beta''), & (a', b', c' \,)(\, \gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a'', b'', c'' \,)(\, \alpha, \alpha', \alpha''), & (a'', b'', c'' \,)(\, \beta, \beta', \beta''), & (a'', b'', c'' \,)(\, \gamma, \gamma', \gamma'') \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)$$

Fonte: Cayley (1858, p.20)

Deste modo, temos que:

$$\begin{array}{ccc} A = a\alpha + b\alpha' + c\alpha'' & B = a\beta + b\beta' + c\beta'' & C = a\gamma + b\gamma' + c\gamma'' \\ A' = a'\alpha + b'\alpha' + c'\alpha'' & B' = a'\beta + b'\beta' + c'\beta'' & C' = a'\gamma + b'\gamma' + c'\gamma'' \\ A'' = a''\alpha + b''\alpha' + c''\alpha'' & B'' = a''\beta + b''\beta' + c''\beta'' & C'' = a''\gamma + b''\gamma' + c''\gamma'' \end{array}$$

Observe que o resultado da composição (Figura 14), obtida pela regra expressa na Figura 15, estabelece uma multiplicação de modo que os elementos da primeira matriz são tomados horizontalmente (linha) e os elementos da segunda matriz são considerados verticalmente (coluna). Apresentamos algumas considerações em relação às propriedades de composição de matrizes atribuídas por Cayley (1858):

- É possível multiplicar ou compor três ou mais matrizes, de modo que quaisquer duas matrizes consecutivas podem ser compostas e o resultado dessa composição substitui essas duas matrizes por uma única matriz. Este processo de multiplicação entre matrizes consecutivas deve ser repetido até que todas sejam compostas e o resultado expresso em uma única matriz que é o resultado da composição efetuada. As composições $L.MN = LM.N = LMN$ ou $LM.NP = L.MN.P = LM.N.P$ são exemplos de como efetuar a multiplicação entre três ou mais matrizes. A composição de matrizes não é uma operação comutativa, porém, é associativa;

- No processo de composição de uma matriz com a matriz zero, independentemente de ser a primeira ou a segunda matriz, resulta na própria matriz zero; isto é, podemos interpretar que neste processo, a operação da composição é particularmente comutativa em relação à matriz zero;
- Uma matriz não altera o seu resultado no processo de composição com a matriz unidade, independentemente de ser a primeira ou a segunda matriz componente da composição; podemos novamente interpretar que a composição também é particularmente comutativa em relação à matriz unidade.

Considerações Finais

Por meio de olharmos as obras originais, podemos verificar como são dadas as definições e o desenvolvimento delas no decorrer do tempo. No caso da matemática, em virtude do caráter lógico da ciência, muito da estrutura original se mantém, contudo, no caso das matrizes, por meio da obra de Cayley (1858) pudemos verificar que o conceito de matriz é introduzido para simbolizar os coeficientes de equações de sistemas lineares, enquanto que, ao compararmos com a notação dos dias de hoje, a ideia de matriz é dada para representar tabelas, disassociando-se da sua definição original e gênese da origem do conceito. Deste modo, ao realizarmos a soma e subtração entre matrizes, multiplicação de matriz por uma quantidade única (escalar) e composição de matrizes, Cayley (1858) introduziu a notação de matrizes para efetuar operações entre sistemas lineares e utilizou a simbologia das matrizes para simplificar o processo de obtenção dos resultados.

A ideia dos elementos de uma matriz como representação dos coeficientes de um sistema linear, tem sido geralmente abordada somente após o estudo de Determinantes, invertendo a ordem histórica das descobertas matemáticas em prol do que poderiamos denominar e tecer críticas quanto a possibilidade de conceber uma visão linear do conhecimento lógico-matemático. Neste artigo tivemos o propósito de apresentar aspectos originais da definição de matrizes, e por meio dos resultados apresentados abre a possibilidade de desenvolvermos propostas didáticas para aplicação em sala de aula e realizar uma análise de livros didáticos entre as definições apresentadas nos livros e a obra de Cayley.

REFERÊNCIAS

BARROS, J. D`A. Fontes Históricas: revisitando alguns aspetos primordiais para a Pesquisa Histórica. **Mouseion**, n.12, mai-ago, p.129-159, 2012.

BERNARDES, A. Uma proposta para integrar a História da Matemática ao Ensino de Matemática: História das Matrizes e regras do discurso matemático. **Hipátia**, vol.4, n.1, p.84-101, 2019.

BERNARDES, A.; ROQUE, T. História da noção de Matriz: uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas. **Revista Brasileira de História da Matemática**, vol. 16, n. 31, p. 1-19, 2016.

CAYLEY, A. A Memoir on the Theory of Matrices. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 148, 1858.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

LIMA, L. A. M. de; PEREIRA, M. G. G.; CHAQUIAM, M. Uma abordagem histórica de matrizes para o uso em sala de aula. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, vol. 5, n. 14, p. 51-63, 2018.

MATOS, F. C. de; NUNES, J. M. V. Práticas com matrizes a partir do estudo histórico epistemológico. **REMATEC**: Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Ano 14, n. 32, p.09-28, 2019.

PAVANELLO, R.M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. **Estudos em Avaliação Educacional**, v. 17, n. 33, p.29-42, 2006.

SFARD, A. **Thinking as communicating:** Human Development, the growth of discourses. New York: Cambridge University Press, 2008.