



PERSPECTIVA PRÁTICA DOS LOGARITMOS NO SÉCULO XVII EM LONDRES

Verusca Batista Alves¹

Andressa Gomes do Santos²

Isabelle Coelho da Silva³

RESUMO

O estudo dos logaritmos adquire notoriedade em 1614, com a publicação *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, de John Napier, cenário em que podemos ver o aspecto prático do seu uso, uma vez que o autor objetivava facilitar cálculos, relacionando com a astronomia. Nesse mesmo contexto, há a publicação dos tratados de Edmund Gunter e William Oughtred, intitulados, respectivamente: *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise* (1624); e *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* (1632). A partir do seu estudo, percebemos que estes dois tratados apresentam instrumentos de cálculo que utilizam os logaritmos. Assim, neste trabalho, visamos conhecer a abordagem prática dada aos logaritmos a partir do uso de instrumentos de cálculos no século XVII inglês. Para isso, utilizamos uma abordagem qualitativa para realização de uma pesquisa documental e bibliográfica a partir das obras indicadas e de textos que tratam sobre elas. Deste modo, percebemos que os autores continuam a tratar dos logaritmos a partir de uma abordagem prática e que os dois instrumentos realizam cálculos a partir de uma base diferente para os logaritmos daquela época apresentados por Napier. Com isso, vislumbramos uma possível potencialidade didática com os dois instrumentos apresentados a partir da discussão sobre o conceito, uso e possibilidades de cálculos com logaritmos em um âmbito de formação de professores.

Palavras-chave: História da matemática. Logaritmos. Edmund Gunter. William Oughtred. Matemática Prática.

INTRODUÇÃO

O estudo de documentos originais e instrumentos históricos vêm ganhando cada vez mais espaço no Brasil, principalmente, no que tange às pesquisas realizadas no âmbito do Grupo de Pesquisas em Educação e História da Matemática (GPEHM), da Universidade Estadual do Ceará. De acordo com

¹ Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação na Universidade Estadual do Ceará (UECE) e docente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE). verusca.batista@uece.br

² Mestra e docente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE). andressagomes009@gmail.com

³ Doutoranda do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). isabellecoelhods@gmail.com



Albuquerque *et al.* (2018), a partir de 2016, o GPEHM intensificou suas investigações em relação aos instrumentos históricos e às obras nas quais eles estão inseridos.

Dentre estas pesquisas, destacamos o estudo de duas obras: *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise* (1624), de Edmund Gunter (1581-1626) e *The Circles of Proportion and the Horizontall Instrvment* (1632), de William Oughtred (1574-1660). Esses dois tratados do século XVII foram abordados nas dissertações de Santos (2022) e Alves (2019), que destacaram os instrumentos contidos neles e, a partir dos quais, emergiu uma discussão sobre o uso dos logaritmos.

Dessa forma, neste estudo, objetivamos conhecer a abordagem prática dada aos logaritmos a partir do uso de instrumentos de cálculos no século XVII inglês. Para tanto, partimos de uma pesquisa qualitativa, com uma abordagem documental e bibliográfica para tratar das obras mencionadas e da literatura que aborda a temática em questão. Assim, iniciamos este trabalho com um breve panorama sobre o estudo dos logaritmos no século XVII inglês, seguindo para uma descrição sobre como este conhecimento foi abordado na escala dos números, de Edmund Gunter, e, posteriormente, nos círculos de proporção, de William Oughtred.

OS LOGARITMOS NO SÉCULO XVII: BREVE CONTEXTO

Conforme mencionamos anteriormente, partindo das obras de Edmund Gunter e William Oughtred, foram identificados dois instrumentos distintos que eram utilizados para realização de cálculos: a escala dos números; e os círculos de proporção. Com uma investigação sobre a forma de uso desses instrumentos, percebemos que eles mobilizavam o conceito de logaritmo para realização de suas operações.

É possível notar que esses tratados foram publicados na primeira metade do século XVII, na Inglaterra, trazendo uma abordagem prática para o uso dos



logaritmos. Assim, para compreendermos os aspectos que levaram à produção destes dois documentos no século XVII, foi necessário um estudo preliminar sobre o seu contexto de produção e elaboração.

A partir de meados do século XIV, iniciou-se na Europa um período conhecido como Renascimento, impulsionado por diversos aspectos tais como o surgimento da imprensa, a reforma no ensino, o movimento humanista, as grandes navegações e a valorização das artes manuais. Com isso, a partir dos séculos XVI e XVII, temos os primeiros indícios do movimento que levaria à especialização moderna, no século XIX. (SAITO, 2015).

Nesse sentido, é importante notar um apelo à utilidade das ciências, em particular das matemáticas, para a sociedade, levando em conta uma valorização dos conhecimentos práticos. De acordo com Dear (2001), fora do âmbito das universidades, iniciava-se um debate em favor deste conhecimento prático ao invés daquele contemplativo aristotélico estabelecido pela escolástica. O autor destaca as sociedades e academias como locais onde essas discussões aconteciam, em que muitas dessas instituições buscavam um fortalecimento do país a partir do aperfeiçoamento destas habilidades práticas.

Ainda no mesmo contexto, com os avanços nas matemáticas e a necessidade de cálculos cada vez mais precisos e trabalhosos, surgem os logaritmos. Segundo Hobson (1914), os logaritmos foram desenvolvidos por John Napier (1550-1617), aparecendo, pela primeira vez, em *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614). O autor afirma que eles se configuraram como um importante instrumento para aqueles que executavam cálculos extensos de forma a evitar um árduo trabalho.

Isso também é confirmado por Roque (2012), que indica que os logaritmos foram estabelecidos inicialmente como uma importante ferramenta para calcular. Nesse sentido, Schuster (2017) indica que o principal objetivo de Napier estava relacionado à astronomia e construção de tabelas astronômicas – que envolviam as operações extensas mencionadas anteriormente. Do mesmo modo, a realização deste tipo de cálculo, também, foi uma preocupação de outros estudiosos da época,



como Johannes Kepler (1571-1630) e o seu uso para a verificação das leis dos movimentos dos planetas (HOBSON, 1914).

Dessa forma, é nesse contexto de valorização das artes práticas, produção de conhecimentos fora das universidades e busca por técnicas de simplificação de cálculos árduos que encontramos a produção das obras e dos instrumentos de Edmund Gunter e William Oughtred, como podemos ver a seguir.

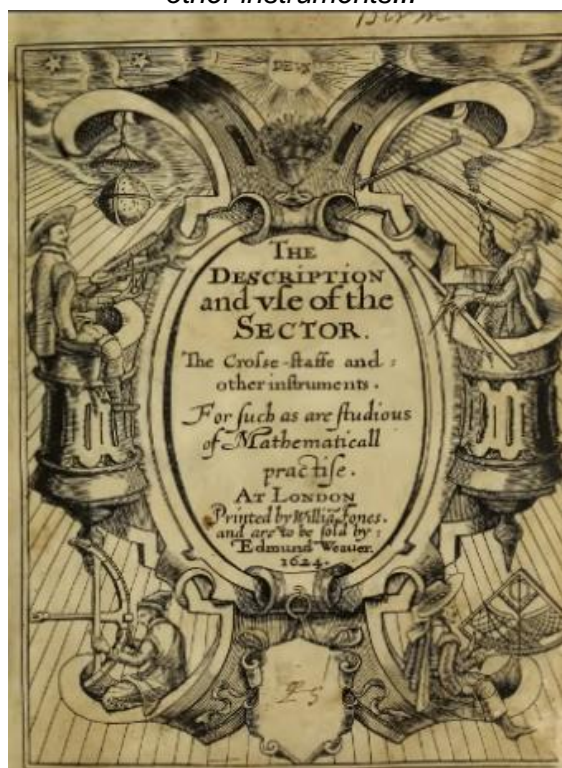
OS LOGARITMOS NA ESCALA DOS NÚMEROS DO *CROSS-STAFF*

Os logaritmos de base dez que são conhecidos na matemática moderna foram desenvolvidos a partir das ideias de John Napier e de Henry Briggs (1561-1630) e foram publicados em forma de tabelas em 1617 no estudo denominado *Logarithmorum chilias prima* na cidade de Londres tendo como autor Henry Briggs. Nesse período, ele era professor no Gresham College, onde estreitou relações com Edmund Gunter, outro estudioso inglês das matemáticas (SANTOS; PEREIRA, 2022).

Edmund Gunter desenvolveu um tratado denominado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise* (Figura 1), publicado em sua primeira versão em 1623 em Londres e tratava sobre a descrição e uso de quatro instrumentos: o setor; o *cross-staff*; o *cross-bow*; e o quadrante.



Figura 1: Frontispício do *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments...*

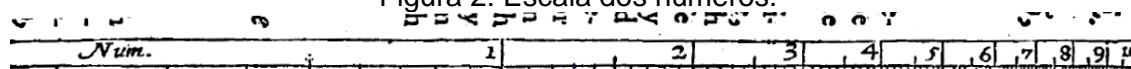


Fonte: Gunter (1624).

Esse tratado está dividido em duas partes: uma que compreende o instrumento denominado setor; e outra que contempla o *cross-staff*. Na segunda parte desse tratado também são encontrados dois apêndices: o primeiro trata sobre o *cross-bow*; e o segundo aborda o quadrante.

Logo no frontispício do tratado, pode-se observar os quatro instrumentos que Gunter descreve no decorrer do estudo. Destaca-se dentre eles o *cross-staff*, que trouxe para o século XVII quatro escalas inéditas até então, chamadas por Gunter (1624) de escalas de proporções. São elas: a escala das tangentes artificiais; senos artificiais; senos versados; e escala dos números. A primeira escala de proporções a ser descrita pelo autor é a escala dos números (Figura 2).

Figura 2: Escala dos números.



Fonte: Gunter (1624, p. 31).



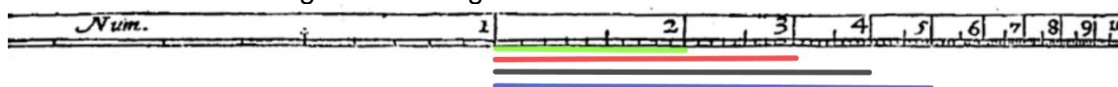
Gunter (1624, p. 2, tradução nossa) descreve que a escala dos números é “[...] anotada com a letra N, dividida desigualmente em 1000 partes, e numerada com 1. 2. 3. 4. até 10”. Nesse trecho, o autor fornece uma informação da característica dessa escala, uma vez que ela é dividida desigualmente, algo que se confirma na sua construção.

O autor não deixa explícito no tratado como construir a escala, apenas afirma que “a escala dos números pode ser inserida no primeiro Chiliad Logarithmes do Sr. Briggs [...]” (GUNTER, 1624, p. 4, tradução nossa). Gunter indica que, para desenvolver a escala dos números, ele faz referência ao tratado *Logarithmorum chilias prima*, de Henry Briggs, contudo não menciona os logaritmos no tratado.

No estudo de Santos (2022) há a indicação de uma possibilidade de construção dessa escala a partir dos logaritmos dispostos nas tabelas do *Logarithmorum chilias prima*, uma vez que Gunter (1624) não descreve detalhadamente a graduação da escala.

Segundo Santos (2022), as distâncias da marcação 1 às demais correspondem aos logaritmos dos números que estão nas tabelas logarítmicas de Briggs. Logo, observa-se na Figura 3 que os segmentos de reta referentes aos logaritmos.

Figura 3: Os logaritmos na escala dos números.



Fonte: Adaptado de Gunter (1624, p. 31).

A distância entre 1 e 2 representada pelo primeiro segmento de reta de cor verde corresponde ao logaritmo de 2. O segundo segmento de reta, de cor vermelha, corresponde ao $\log 3$, assim por diante. Observa-se que todas as distâncias partem da marcação 1 equivalente ao $\log 1$ que tem como resultado zero.

Como os logaritmos publicados por Briggs têm 14 casas decimais, as marcações são aproximadas, então, para reconstrução da escala dos números, deve-se escolher o tamanho que se deseja que a escala possua e multiplicar todos



XV SNHM
Seminário Nacional de História da Matemática
Abril de 2023
Maceió - AL



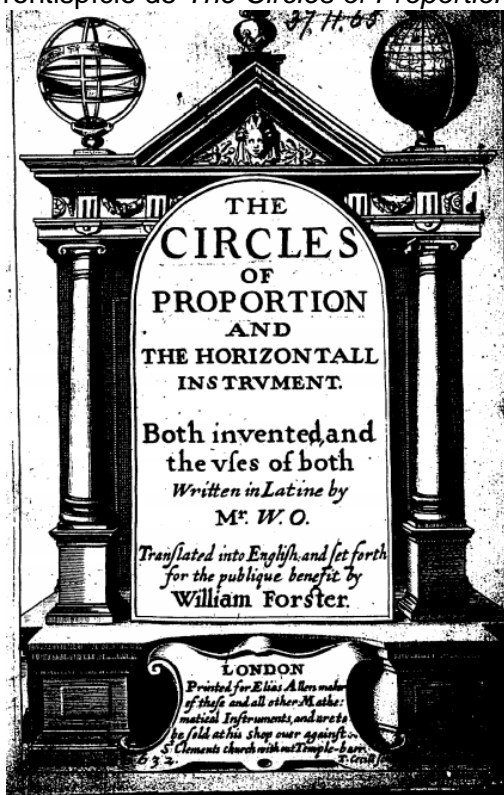
os logaritmos por essa grandeza. A possibilidade de construir as marcações da escala dos números considerando como ponto de partida o $\log 1$ é reforçada pelas propriedades dos logaritmos.

Com essa escala, Edmund Gunter conseguiu desenvolver algo inédito para os estudos sobre logaritmos na matemática prática da Europa no século XVII. A escala dos números incorpora a representação dos logaritmos de base dez como segmentos de reta com a finalidade de realizar cálculos. Posteriormente a publicação e disseminação do tratado que aborda sua descrição e uso, outros instrumentos foram construídos com base nos logaritmos, um deles são os círculos de proporção.

OS LOGARITMOS NA ESCALA DE NÚMEROS DESIGUAIS DOS CÍRCULOS DE PROPORÇÃO

Outro instrumento que podemos tratar no contexto dos logaritmos tem seu nome associado ao clérigo inglês William Oughtred, que o descreveu em seu tratado intitulado *The Circles of Proportion and the Horizontall Instrvment* (Figura 4), publicado pela primeira vez em 1632.

Figura 4: Frontispício de *The Circles of Proportion...* de 1632.



Fonte: Oughtred (1632).

O instrumento em questão é os círculos de proporção (Figura 5), cuja descrição está presente no primeiro capítulo do tratado mencionado. Além disso, nos demais capítulos, há o tratamento de como manusear o instrumento, indicando os teoremas matemáticos que apontam os conhecimentos que o leitor de Oughtred (1632) deveria compreender para a utilização do objeto e aplicações matemáticas em diversas situações práticas que podem ser solucionadas mediante a manipulação dos círculos de proporção.

Figura 5: Círculos de proporção.



Fonte: Adaptado de Oughtred (1632, s/p) e National Museum of Scotland (2022).

Os logaritmos surgem de forma explícita e implícita quando tratamos dos círculos de proporção. No que diz respeito ao aspecto explícito, ele está relacionado ao viés teórico da matemática, pois Oughtred (1632) defendia que antes da utilização de qualquer instrumento, o leitor deveria estar familiarizado com o estudo teórico das matemáticas (ALVES, 2019).

Além disso, em vários trechos dos capítulos iniciais, no qual ele cita a respeito da constituição e do manuseio dos círculos, ele faz menção aos logaritmos, como nos excertos a seguir:

Os números são multiplicados pela adição de seus logaritmos; e eles são divididos pela subtração de seus logaritmos. (OUGHTRED, 1632, p. 04, tradução nossa)

[...] a partir desses fundamentos assim estabelecidos, (se você corretamente conceber a natureza dos Logaritmos), segue-se a descoberta do quarto proporcional por este Instrumento: do qual esta é a Regra. Abra os braços do Instrumento à distância do primeiro e do segundo número: depois traga o braço antecedente, ou aquele que permaneceu sobre o primeiro número até o terceiro, e assim o braço conseqüente, mantendo a mesma abertura, mostrará o quarto número procurado. (OUGHTRED, 1632, p. 05, tradução nossa)

Note que a regra mencionada por Oughtred (1632) refere-se ao manuseio do instrumento, e que essa ação de se manter a distância entre os indicadores (ou braços, figura 5 – direita) como forma de manter a proporcionalidade, estabelece-se uma relação entre logaritmos e as noções de proporcionalidade (ALVES;



PEREIRA, 2021). Para tanto, Oughtred (1632) destaca como pertinente, informar ao leitor dois teoremas:

Teorema: Se de três números dados, o primeiro divide o segundo e o quociente multiplica o terceiro; o produto será o quarto proporcional aos três números indicados.

Teorema: Se três números são dados, o segundo divide o primeiro e o quociente divide o terceiro; este quociente posterior será o quarto proporcional, aos três números dados. (OUGHTRED, 1632, p. 05, tradução nossa)

Compreender esses teoremas associado ao movimento dos indicadores do instrumento nos releva importantes questões matemáticas aplicadas as situações práticas que estabelecem conexões entre conhecimentos matemáticos que, no contexto do ensino de Matemática moderno, não se faz associação.

Quanto a questão de os logaritmos surgirem de forma implícita, destacamos a constituição do próprio instrumento. É importante mencionar que, diferente de outros tratados do período, Oughtred (1632), assim como Gunter (1624), não explicita a forma de construção do instrumento, porém, ele o descreve da seguinte forma:

Existem vários tipos de círculos, divididos depois de várias maneiras, junto com um indicador a ser aberto depois, à maneira de um par de compassos. [...] O primeiro, ou círculo mais externo é de senos, de 5 graus 45 minutos quase, até 90. [...] O segundo círculo é de tangentes, de 5 graus e 45 minutos aproximadamente, até 45 graus. [...] O terceiro círculo é de tangentes, de 45 graus até 84 graus e 15 minutos. [...] O sexto círculo é de tangentes de 84 graus até aproximadamente 89 graus e 25 minutos. O sétimo círculo é de tangentes de aproximadamente 35 minutos até 6 graus. O oitavo círculo é de senos de aproximadamente 35 minutos até 6 graus. O quarto círculo é de Números Desiguais, que são anotados com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1. [...]do quarto círculo significam muitas vezes dez mil, ou todo o raio. [...] O quinto círculo é de Números Iguais, que são anotados com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0; este quinto círculo é raro de qualquer uso, mas [é] somente por meio dele, [que] a distância dada de números pode ser multiplicada ou dividida, conforme necessário. (OUGHTRED, 1632, p. 01-04, tradução nossa)

A partir da descrição de Oughtred (1632), Alves e Pereira (2019) mostram que é possível a reconstrução dos círculos de proporção, através do *software* GeoGebra para fins didáticos, no qual as autoras explicam que cada círculo dos



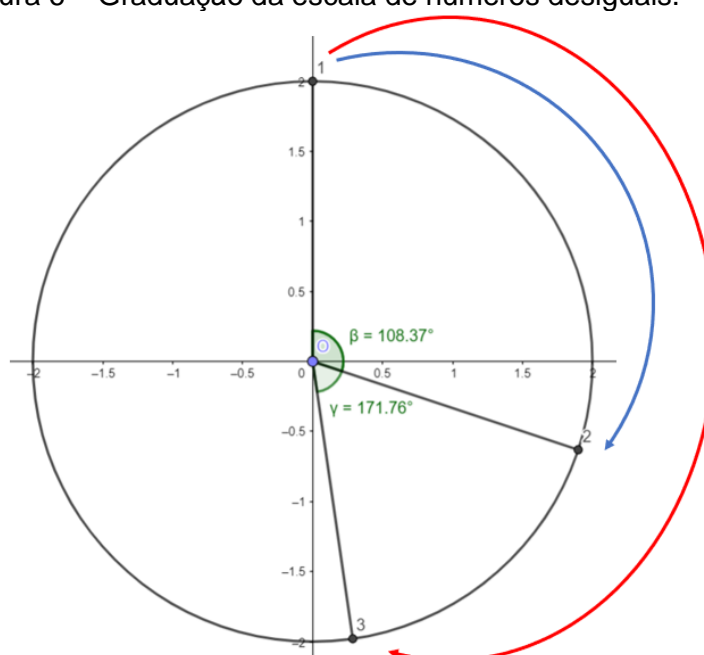
mencionados, exceto o quinto círculo chamado de números iguais, seguem um padrão análogo, utilizando os logaritmos.

Desse modo, para essa reconstrução, considera-se inicialmente uma circunferência de raio qualquer. No caso do quarto círculo, chamado de números desiguais, a graduação de cada valor, ou seja, o local para indicar os números de 1 a 9 são definidos pela distância angular entre os pontos da circunferência, utilizando a seguinte equação:

$$\beta a = \log_{10} a \cdot 360^\circ$$

em que, β corresponde ao ângulo que será obtido e que indicará a posição do valor a ser graduado e a é o valor que varia de 1 à 9 (ALVES; PEREIRA, 2021). A figura 6 aponta o posicionamento dos 3 primeiros números.

Figura 6 – Graduação da escala de números desiguais.



Fonte: Elaborado pelas autoras (2022)

O primeiro ponto, é o valor 1, indicado no eixo vertical. Ao aplicarmos a relação substituindo o valor de $a = 1$, temos que:

$$\beta 1 = \log_{10} 1 \cdot 360^\circ = 0^\circ$$

Logo, o primeiro valor, ou seja, o número 1, deve ser posicionado na circunferência com ângulo de 0° . O segundo e terceiro valores são análogos. Portanto,



XV SNHM
Seminário Nacional de História da Matemática
 Abril de 2023
 Maceió - AL



$$\beta_2 = \log_{10} 2 \cdot 360^\circ \approx 108,37^\circ$$

$$\beta_3 = \log_{10} 3 \cdot 360^\circ \approx 171,76^\circ$$

e assim, o ponto 2, é posicionado formando um ângulo de aproximadamente $108,37^\circ$, indicado na figura 6 pelo arco azul, e, o ponto 3, deve ser graduado na posição angular de aproximadamente $171,76^\circ$, indicado pelo arco vermelho. Os demais valores são análogos.

William Oughtred, respondia então a necessidade londrina, que estava em desenvolvimento, com a publicação de suas obras, e com a disseminação dos círculos de proporção. Ele transferiu seus conhecimentos matemáticos ao seu instrumento, que se tornou referência e facilitou cálculos matemáticos durante o século XVII, tendo perdurado a noção de uma régua de cálculo circular até a década de 1970, como uma ferramenta facilitadora de cálculos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir deste trabalho, percebemos que os logaritmos tiveram um local de destaque nas discussões realizadas na Inglaterra, no século XVII. Inicialmente tratados por John Napier, não demorou para que outras obras sobre os logaritmos fossem publicadas por estudiosos do período.

Neste estudo, realizamos uma breve explanação sobre o contexto no qual os logaritmos foram desenvolvidos e continuaram a ser utilizados por outros estudiosos das matemáticas. Isto nos dá indícios do importante papel que este instrumento de cálculo desempenhou nesta época, principalmente, em sua relação com o uso prático, o que pôde ser visto tanto por Napier, como por Gunter e Oughtred. Entretanto, ainda são necessários estudos mais aprofundados sobre esses e outros tratados que incluíram seu uso na Inglaterra renascentista.

É importante notar que, embora os dois instrumentos apresentados nesse artigo possuam um viés prático para o uso dos logaritmos, a base utilizada por Gunter e Oughtred é diferente daquela inicialmente indicada por Napier: os dois primeiros utilizaram a base 10, como Briggs havia proposto anteriormente. Em



contrapartida, podemos inferir que, se eles tivessem utilizado outra base, por exemplo a de Napier, as marcações nos instrumentos seriam diferentes.

Portanto, embora não seja o foco desse artigo, podemos vislumbrar possíveis potencialidades de uso desses instrumentos de cálculo a fim de discutir o conceito e usabilidade dos logaritmos na formação de professores. Essa abordagem pode ser feita, principalmente, em relação às possíveis bases a serem utilizadas para realizar as marcações nos instrumentos e, também, às associações estabelecidas com outros conhecimentos matemáticos inseridos nos instrumentos de Gunter e Oughtred.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, S. M.; OLIVEIRA, F. W. S.; MARTINS, E. B.; PEREIRA, A. C. C. Pesquisas envolvendo instrumentos históricos matemáticos e a interface entre história e ensino: uma visão dos trabalhos desenvolvidos no gpehm. **Boletim Online de Educação Matemática**, [S.L.], v. 6, n. 12, p. 128-144, 22 jan. 2019. Universidade do Estado de Santa Catarina. <http://dx.doi.org/10.5965/2357724x06122018128>. Disponível em: <https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/13367/9657>. Acesso em: 26 nov. 2022.

ALVES, V. B. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred**. 2019. 153f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2019.

ALVES, Verusca Batista; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Seno, cosseno e tangente: uma atividade com os círculos de proporção de William Oughtred (1633) na formação de professores de matemática. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v. 16, n. 35, p. 74-88, abr. 2020. ISSN 2317-5125. Disponível em: <https://www.periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/8275/6175>. Acesso em: 29 nov. 2022. doi:<http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v16i35.8275>.

ALVES, Verusca Batista. PEREIRA, Ana Carolina Costa. A reconstrução dos círculos de proporção no geogebra como uma atividade para a mobilização de conhecimentos matemáticos. **RHMP**, local, v. 5, n. 1, p. 21-28, 2019. Disponível em: <http://www.rhmp.com.br/index/index.php/rhmp/article/view/69>. Acesso em: 13 nov. 2022.

DEAR, Peter. **Revolutionizing the Sciences: european knowledge and its ambitions, 1500-1700**. 2. ed. Princeton: Princeton University Press, 2001. 208 p.



GUNTER, E. **The Description and use of the sector. The Crosse-staffe and other instruments. For such as are studious of Mathematicall practise.** London: William Jones, 1624.

HOBSON, E. W.. **John Napier and the Invention of Logarithms**, 1614. Cambridge: Cambridge University Press, 1914. Disponível em: <https://jscholarship.library.jhu.edu/bitstream/handle/1774.2/34187/31151005337641.pdf>. Acesso em: 26 nov. 2022.

NATIONAL MUSEUM OF SCOTLAND. **Calculating instrument, Sundial instrument, Double horizontal dial, Circles of proportion.** Disponível em: <https://www.nms.ac.uk/explore-our-collections/collection-search-results/?item_id=218890>. Acesso em: 14 nov. 2022.

OUGHTRED, William. **The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment.** London: Elias Allen, 1632.

ROQUE, T. **História da matemática.** Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re) construções contextuais.** São Paulo: Editora Livraria da Física, p. 259, 2015.

SANTOS, A. G. **Os aspectos matemáticos relacionados à média geométrica que emergem a partir da manipulação da escala dos números (1623) elaborada por Edmund Gunter com licenciandos em Matemática.** 2022. 222f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2022.

SANTOS, A. G.; PEREIRA, A. C. C. Gresham College e a matemática prática de Londres no século XVII. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [S.L.], v. 22, n. 45, p. 67-81, 6 set. 2022. **Revista Brasileira de História da Matemática - RBHM.** <http://dx.doi.org/10.47976/rbhm2022v22n4567-81>.

SCHUSTER, J. A. Consuming and Appropriating Practical Mathematics and the Mixed Mathematical Fields, or Being “Influenced” by Them: the case of the young descartes. In: CORMACK, L. B.; WALTON, S. A.; SCHUSTER, J. A. (ed.). **Mathematical Practitioners and the Transformation of Natural Knowledge in Early Modern Europe.** Cham: Springer, 2017. Cap. 3. p. 37-65.