ROBERVAL E A QUADRATRIZ

Patrícia Nunes da Silva[1]

RESUMO

Gilles Personne de Roberval (1602-1675) utilizou argumentos da cinemática para desenvolver um método para determinação de tangentes. Essencialmente, o método consiste em decompor o movimento da partícula em movimentos mais simples de modo que o vetor velocidade do movimento possa ser obtido a partir dos vetores velocidades (conhecidos) dos movimentos mais simples. Para o método ser corretamente aplicado, é necessário que os movimentos mais simples sejam independentes a fim de garantir que o vetor velocidade em cada ponto possa ser obtido pela aplicação da regra do paralelogramo. No caso da construção da quadratriz proposta por Roberval, os movimentos geradores considerados não verificam essa hipótese de independência. Por este motivo, sua construção recebeu diversas críticas de historiadores e de matemáticos. Veremos como Roberval engenhosamente contornou esta dificuldade. Neste trabalho, estamos interessados em discutir e descrever a construção utilizada por Roberval para determinação de tangentes à quadratriz tal como descrita por Grattan-Guinness (2000).

Palavras-chave: Quadratriz. Determinação de tangentes. Regra do paralelogramo.

INTRODUÇÃO

Segundo Grattan-Guinness (2000), no final da década de 1630, Roberval utilizou argumentos da cinemática para desenvolver um método para determinação de tangentes. Roberval (1730) resume seu método da seguinte maneira:

> A partir de propriedades da curva considerada, analise os movimentos a que está sujeita partícula no ponto em que se deseja determinar a tangente. Componha todos os movimentos e desenhe a linha de direção do movimento resultante e você terá a tangente. (ROBERVAL, 1730 apud WOLFSON, 2004, p. 229)

O método possui dois princípios básicos:

- Identificar a curva com a trajetória de uma partícula que está sujeita à ação de dois movimentos.

1 nunes@ime.uerj.br

- Considerar em cada ponto da curva a tangente como a direção do movimento no ponto considerado.

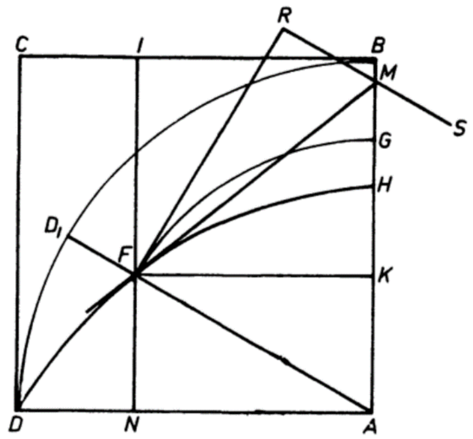
Essencialmente, o método consiste em decompor o movimento da partícula em movimentos mais simples de modo que o vetor velocidade do movimento possa ser obtido a partir dos vetores velocidades (conhecidos) dos movimentos mais simples. Há um elemento fundamental para que este processo seja bem-sucedido: os movimentos mais simples devem ser independentes. Tal hipótese garante que o vetor velocidade em cada ponto possa ser obtido pela adição dos vetores velocidades dos movimentos mais simples através da regra do paralelogramo (WOLFSON, 2004).

Neste trabalho, estamos interessados em discutir e analisar a construção utilizada por Roberval para determinação de tangentes à quadratriz tal como descrita por Grattan-Guinness (2000).

QUADRATRIZ

Na Figura 1, os dois lados $\boldsymbol{AD}$ e $\boldsymbol{CD}$ do quadrado $\boldsymbol{ABCD}$ se movem simultaneamente. $\boldsymbol{AD}$ gira uniformemente em torno de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{CD}$ se desloca paralelamente a $\boldsymbol{AB}$ de tal maneira que $\boldsymbol{AD}$ e $\boldsymbol{CD}$ alcançam o lado $\boldsymbol{AB}$ ao mesmo tempo. O ponto de interseção entre os dois segmentos define a curva $\boldsymbol{DFH}$, conhecida como quadratriz. Em um certo instante após iniciado os movimentos geradores, o lado $\boldsymbol{AD}$ encontra-se na posição de $\boldsymbol{AD_1}$ e o lado $\boldsymbol{CD}$, na posição de $\boldsymbol{IN}$.

Figura 1: construção da quadratriz



Fonte: Grattan-Guinnes (2000, p. 22)

O ponto F, interseção entre IN e AD_1, é um dos pontos da quadratriz.

Como Roberval constrói a tangente à quadratriz no ponto F

Para determinar a tangente à quadratriz no ponto F, Roberval assume que FK representa a velocidade do segmento IN. Pela definição da quadratriz, o tempo necessário para o segmento IN percorrer a distância FK é o mesmo em que D_1 descreve o arco D_1B. Com estas convenções, o arco D_1B representa a velocidade do movimento circular de D_1 e o arco FG representa a velocidade do movimento circular de F. A direção deste último movimento é perpendicular a AF. Assim, o movimento circular de F será representado pelo segmento FR, perpendicular a AF com comprimento igual ao do arco FG. Ele considerar a reta RS que passa por R e é paralela a AF e determina sua interseção, M, entre RS e a reta determinada por AB. FM será então tangente à quadratriz no ponto F.

Note que FM não corresponde à aplicação da regra do paralelogramo aos vetores velocidades dos dois movimentos geradores descritos inicialmente para quadratriz. Grattan-Guinness (2000) aponta que ainda que o argumento de Roberval não seja muito claro, é possível considerar que subjacente a seu argumento o movimento de F seja considerado de duas maneiras:

(I) O movimento de F na quadratriz é composto pelo movimento de F participando do movimento de AD (com a velocidade instantânea FR)

e o movimento de $\boldsymbol{F}$ ao longo de $\boldsymbol{AD}$, necessário para que $\boldsymbol{F}$ seja ponto de interseção de $\boldsymbol{AD_1}$e $\boldsymbol{IN}$; a direção do último movimento é $\boldsymbol{AF}$ ou $\boldsymbol{RS}$

(II) É também possível, interpretar o movimento de $\boldsymbol{F}$ pela composição de sua participação no movimento de $\boldsymbol{IN}$ com seu movimento ao longo de $\boldsymbol{IN}$ (para garantir a interseção com $\boldsymbol{AD_1}$); novamente, a direção do último movimento é $\boldsymbol{AF}$ ou $\boldsymbol{RS}$.

Como as duas descrições são satisfeitas pela quadratriz, elas permitem deduzir que $\boldsymbol{FM}$ é tangente à quadratriz no ponto $\boldsymbol{F}$.

JUSTIFICATIVA DETALHADA DA CONSTRUÇÃO

Para justificar e detalhar os argumentos apresentados anteriormente, vamos supor, sem perda de generalidade que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{1}$ e que a rotação e a translação alcançam o lado $\boldsymbol{AB}$ em uma unidade de tempo. Vamos considerar a origem do sistema em $\boldsymbol{D}$. Vamos descrever as duas composições de movimento indicadas anteriormente através de parametrizações.

(1) Quando o movimento do ponto $\boldsymbol{F}$ é dado pela composição da rotação de $\boldsymbol{AD}$ (curva $\gamma_1(t)$) e pelo deslocamento ao longo de $\boldsymbol{AF}$ (curva $\gamma_2(t)$) para garantir a interseção, temos:

$$\gamma_1(t) = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$$

$$\gamma_2(t) = \left(t - 1 + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), (1-t)\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$$

e

$$\gamma_1'(t) = \left(\frac{\pi}{2}\mathbf{sin}\left(\frac{\pi t}{2}\right), \frac{\pi}{2}\mathbf{cos}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$$

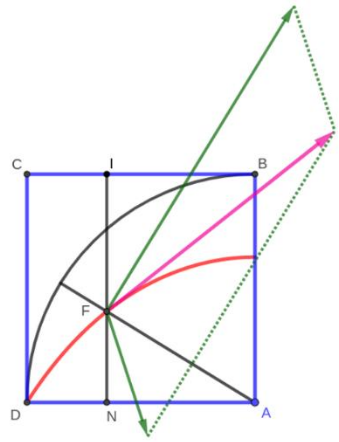
$$\gamma_2'(t) = \left(1 - \frac{\pi}{2}\mathbf{sin}\left(\frac{\pi t}{2}\right), -\mathbf{tan}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{(1-t)\pi}{2}\sec^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\mathbf{cos}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$$

A quadratriz[2] $\gamma(t)$ é dada por

[2] Na parametrização adotada, o valor para $t = 1$ pode ser obtido por um processo de limite.

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) = \left(t, (1-t)\,\mathbf{tan}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right), \qquad t \in [0,1)$$

Figura 2: parametrização da composição de movimentos (I)



Fonte: A autora (2022)

Para $\boldsymbol{F} = \gamma(t),\ t \in [0,1)$, a tangente à quadratriz em $\boldsymbol{F}$ é dada por

$$\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + \gamma_2'(t) = \left(1, -\,\mathbf{tan}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{(1-t)\pi}{2}\sec^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right).$$

A Figura 2 ilustra a aplicação da regra do paralelogramo para obtenção da tangente em $\boldsymbol{F}$ quando consideramos os movimentos geradores descritos em (I).

Roberval não dispõe da informação sobre o vetor $\gamma_2'(t)$. Para a direção de $\gamma'(t)$ (tangente à quadratriz em $\boldsymbol{F}$), ele embute um sistema de unidades de modo que a velocidade de deslocamento de $\boldsymbol{F}$ para direita coincide com a medida de $\boldsymbol{FK}$. Isto permite que ele deduza a medida de $\boldsymbol{FR}$ (a velocidade do movimento circular de $\boldsymbol{F}$). Note que

$$\frac{\boldsymbol{NA}}{\boldsymbol{FA}} = \mathbf{cos}\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

Como $\boldsymbol{NA} = \mathbf{1} - \boldsymbol{t}$, temos

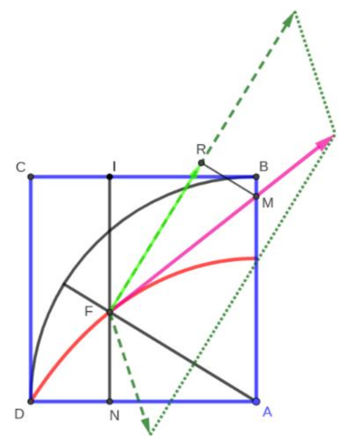
$$\boldsymbol{FA} = \frac{1-t}{\mathbf{cos}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}.$$

Assim,

$$\boldsymbol{FR} = \text{arc}\,\boldsymbol{FG} = \frac{1-t}{\mathbf{cos}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}\frac{(1-t)\pi}{2} = \frac{(1-t)^2\pi}{2\,\mathbf{cos}\left(\frac{\pi t}{2}\right)} = \frac{\pi(1-t)^2}{2}\,\mathbf{sec}\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

Neste momento, resgatando a composição dos movimentos indicadas em (I), Roberval afirma que a direção de $\gamma'(t)$ coincide com a de $\boldsymbol{FM}$, onde $\boldsymbol{M}$ é obtido pela interseção da reta que passa por $\boldsymbol{R}$ e é perpendicular a $\boldsymbol{FR}$ com a reta suporte do lado $\boldsymbol{AB}$ (ver Figura 3).

Figura 3: Tangente $\boldsymbol{FM}$



Fonte: A autora (2022)

Para entender por que esta construção determina corretamente a direção de $\gamma'(t)$, vamos considerar a segunda composição de movimentos (II)

(2) Quando o movimento do ponto $\boldsymbol{F}$ é dado pela composição do movimento de $\boldsymbol{IN}$ (curva $\lambda_1(t)$) e pelo deslocamento ao longo de $\boldsymbol{IN}$ (curva $\lambda_2(t)$) para garantir a interseção, temos:

$$\lambda_1(t) = (t, 0)$$

$$\lambda_2(t) = \left(0, (1-t)\,\mathbf{tan}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$$

e

$$\lambda_1'(t) = (1{,}0)$$

$$\lambda_2'(t) = \left(0, -\mathbf{tan}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{(1-t)\pi}{2}\mathbf{sec}^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$$

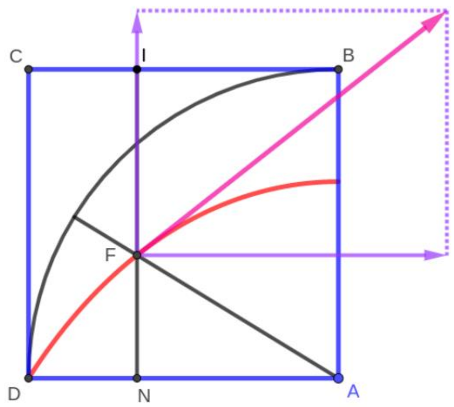
A quadratriz $\gamma(t)$ é dada por

$$\gamma(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) = \left(t, (1-t)\,\mathbf{tan}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right), \qquad t \in [0,1).$$

Para $\boldsymbol{F} = \gamma(t),\ t \in [0,1)$, a tangente à quadratriz em $\boldsymbol{F}$ é dada por:

$$\gamma'(t) = \lambda_1'(t) + \lambda_2'(t) = \left(1, -\,\mathbf{tan}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{(1-t)\pi}{2}\sec^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right).$$

Figura 4: parametrização da composição de movimentos (II)

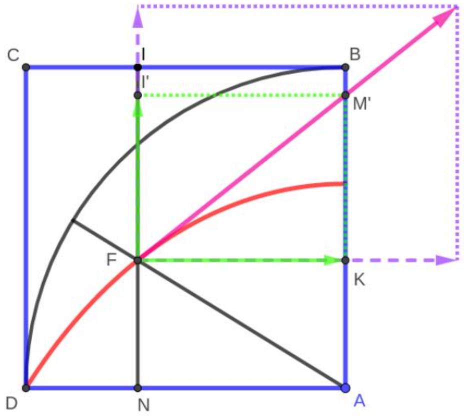


Fonte: A autora (2022)

A Figura 4 ilustra a aplicação da regra do paralelogramo para obtenção da tangente em $\boldsymbol{F}$ quando consideramos os movimentos geradores descritos em (II).

Tal como Roberval, vamos considerar um sistema de unidades de modo que a velocidade de deslocamento de $\boldsymbol{F}$ para direita coincide com a medida de $\boldsymbol{FK}$. Observe que a composição dos movimentos indicadas em (II) permite a aplicação da regra do paralelogramo para determinar $\boldsymbol{M'}$. Tal aplicação nos diz que $\boldsymbol{M'}$ necessariamente pertence à reta suporte de $\boldsymbol{AB}$ (ver Figura 5). Isto permitiria que Roberval ao considerar o movimento (I) determinasse $\boldsymbol{M}$ tal como descrito anteriormente.

Figura 5: Tangente $\boldsymbol{FM}$



Fonte: A autora (2022)

Vamos mostrar que $\boldsymbol{M = M'}$. O vetor relativo ao deslocamento ao longo de $\boldsymbol{IN}$ satisfaz:

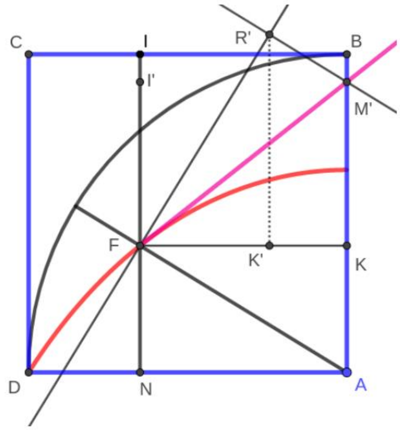
$$\frac{\boldsymbol{FI'}}{\boldsymbol{FK}} = \frac{-\,\mathbf{tan}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{(1-t)\pi}{2}\,\mathbf{sec}^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{1}$$

Como $\boldsymbol{FK = 1 - t}$, temos

$$\boldsymbol{FI'} = -(1-t)\,\mathbf{tan}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{(1-t)^2\pi}{2}\,\mathbf{sec}^2\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

Seja $\boldsymbol{R'}$ tal que $\boldsymbol{FR'}$ é perpendicular a $\boldsymbol{AF}$ e a $\boldsymbol{M'R'}$. Seja $\boldsymbol{K'}$ tal que $\boldsymbol{R'K'}$ é perpendicular a $\boldsymbol{FK}$.

Figura 6: $\boldsymbol{FR' = FR}$



Fonte: A autora (2022)

Temos

$$\boldsymbol{FK'} = \frac{(1-t)^2\pi}{2}\mathbf{tan}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{R'K'} = \frac{(1-t)^2\pi}{2}.$$

Portanto, $\boldsymbol{FR'} = \boldsymbol{FR}$. Logo, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M'}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Segundo Wolfson (2004), a construção de tangentes à quadratriz proposta por Roberval recebeu diversas críticas de historiadores e de matemáticos, como Duhamel, por exemplo. Como os movimentos geradores de rotação de $\boldsymbol{AD}$ e translação de $\boldsymbol{CD}$ não são independentes, Duhamel considerava que Roberval incorretamente aplicava a regra do paralelogramo para obtenção da tangente. Wolfson (2004) e Grattan $\boldsymbol{D}$ que gira com o segmento $\boldsymbol{AD}$ e depois realiza um movimento radial ao longo de $\boldsymbol{AD_1}$ para garantir a interseção com $\boldsymbol{IN}$. Neste caso, a componente da velocidade de rotação é conhecida enquanto a do outro movimento não. Em (II), a componente da velocidade da translação para direita é conhecida e a da velocidade do movimento ao longo de $\boldsymbol{IN}$, não. A engenhosidade de Roberval foi a de identificar que ainda que desconhecidas, estas velocidades eram tais que a aplicação da regra do paralelogramo separadamente aos casos (I) e (II) permitia determinar o segmento $\boldsymbol{FM}$ e assim a direção da tangente à quadratriz em $\boldsymbol{F}$.

REFERÊNCIAS

GRATTAN-GUINNESS, I. **From Calculus to Set Theory 1630-1910: An Introductory History**. Princeton: Princeton University Press, 2000.

ROBERVAL, G. P. Observations sur la composition des Mouvmens, et sur le moyen de trouver les Touchantes des lignes courbes, **Memoires de l 'Academie royale des Sciences** depuis 1666 jusqu 'a 1699, VI (1 730) 1-89.

WOLFSON, P.R. The Crooked Made Straight: Roberval and Newton on Tangents. In: ANDERSON, M., KATZ, V. e WILSON, R. **Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History**. Washington: MAA, 2004. p. 228- 235.