O DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, DESDE O FINAL DO SÉCULO XVII ATÉ MEADOS DO SÉCULO XVIII

Anna Karla Silva do Nascimento[1]
Iran Abreu Mendes[2]

RESUMO

Este trabalho é um breve relato acerca do desenvolvimento das Equações Diferenciais, desde a Acta Eruditorum, periódico no qual relatou o termo pela primeira vez em um artigo de Leibniz, no final do século XVII até meados do século XVIII, com estudos mais aprofundados acerca do assunto, uma vez que já tinham ciência das ferramentas a serem utilizadas para resolver problemas sobre fenômenos naturais. O objetivo deste trabalho é apontar alguns estudiosos das matemáticas do período entre meados do século XVII e XVIII, que contribuíram com o desenvolvimento das Equações Diferenciais, identificando as equações que provocaram alguns métodos de resolução. As fontes utilizadas para a escrita estão fundamentadas nos estudos da Acta Eruditorum de 1684 autoral de Leibniz, que é uma fonte primária; os escritos de Kline (1992), Wussing (1998), Rossi (2001), para tratar sobre a história da ciência e história da matemática; Miceli (2013) para contribuições acerca dos contextos históricos da Idade Moderna, visto que é o contexto em que as Equações Diferenciais foram apresentadas ao público e tratar sobre a investigação histórica na matemática proposta, utilizamos Mendes (2009, 2015 e 2022). As equações diferenciais são uma área de pesquisa em Matemática, portanto desejamos que os/as leitores/as e estudantes observem a maneira não linear do desenvolvimento histórico que difere dos que estão inseridos nos currículos dos cursos.
Palavras-chave: Equações Diferenciais. História da Matemática. Leibniz. Bernoulli. Euler.

1. Introdução

Neste trabalho, tratamos acerca de alguns estudiosos que participaram do desenvolvimento das Equações Diferenciais (ED) durante o final do século XVII até meados do XVIII, juntamente com as necessidades existentes durante o Renascimento, ou seja, problemas correspondentes aos fenômenos naturais que necessitavam de respostas matemáticas e que contribuíram para que as

[1] Docente da Universidade Federal do Cariri (UFCA). E-mail: karla.nascimento@ufca.edu.br.
[2] Docente da Universidade Federal do Pará (UFPA). E-mail: iamendes1@gmail.com.

tornassem em área de conhecimento matemático amplamente estudada nos séculos vindouros.

A Idade Moderna foi um período sucessor a Idade Média, que começou em meados do século XV, por volta de 1453 juntamente com a tomada de Constantinopla pelo Império Otomano e antecedeu a Idade contemporânea, por volta do final do século XVIII, segundo Miceli (2013). Apontaremos alguns acontecimentos ocorridos na política, artes, economia, relações sociais e religião em toda a Europa, embora tais mudanças não tenham seguido uma cronologia parecida, ou seja, cada país teve um ponto de desenvolvimento que diferia dos demais, uma vez que o contexto de cada nação era diferente.

Enquanto as grandes navegações estavam em ascensão entre os séculos XV e XVI, cujos países que mais se destacavam nesta atividade eram Portugal e Espanha, por ação das diversas atividades marítimas, das quais, citamos a exploração dos continentes, dentre eles o americano. A Inglaterra estava em outra fase de sua economia, com a ascensão da burguesia. Foi um período marcado por guerras, como por exemplo, a dos Trinta anos, que interrompeu o crescimento do Império Romano, já a França conquistou influência entre os países da Europa Continental, conforme afirma Wussing (1998).

Podemos observar que a Europa, como continente, possuía várias particularidades em seus países, uma vez que eles tinham necessidades distintas, considerando que esse foi um dos fatores que influenciaram a não homogeneidade do conhecimento científico naquele período.

Observemos que para cada momento que os países passavam, temas das ciências naturais ou físicos eram abordados, porém, necessitavam de ferramentas para alcançarem seus propósitos. A astronomia contribuía com as navegações, que avançava há séculos, porém, a chegada da bússola ao ocidente provocou um desenvolvimento no ramo. Mais tarde, continuaram as pesquisas sobre a temática e estudiosos puderam provar matematicamente as rotas e menores distâncias para que as trajetórias fossem menos trabalhosas, com isto, gerando um melhor custo-benefício.

A ascensão do capitalismo que tomava conta da Inglaterra no século XV promovendo uma solidificação da burguesia e dos arrendatários, que segundo

Miceli (p. 137) estavam "comprometidos com a sociedade que emergia dos destroços do mundo medieval, ainda representado no Estado nacional absolutista", também podemos destacar os estudos realizados por Barrow e Wallis acerca do Cálculo Infinitesimal e que antecederam o Cálculo Diferencial e Integral cuja definição está atribuída a dois pesquisadores, Newton e Lebniz.

A França foi um dos berços da revolução científica europeia, pois matemáticas eram desenvolvidas como a geometria analítica com Descartes, o Cálculo Diferencial e Integral com Leibniz. Foi um período em que os mecenas subsidiavam os encontros entre cientistas, conforme Rossi (2001, p. 265):

> O mecenatismo esteve presente também na França, mas lugares reais ou "ideais" para encontros entre cientistas se formaram também de modo espontâneo, como no caso da complexa rede de correspondência e de relações (abrangia em torno de 40 cientistas) mantida por Marin Mersenne (1588-1648) em uma época, é bom nos lembrarmos disso, que precede a circulação de jornais, periódicos e na qual o intercâmbio de cartas é o canal privilegiado para qualquer intercâmbio intelectual. (ROSSI, 2001, p. 265)

Os mecenas cooperaram fortemente com a Revolução Científica de toda a Europa, vale salientar que os patrocínios também abrangiam a classe artística colaborando diretamente com o desenvolvimento dessas categorias.

A conjuntura da época e o arcabouço do conhecimento matemático acumulado até àquele momento, permitiu que temáticas das Matemáticas fossem amplamente estudadas e desenvolvidas, como enfatiza Wussing (1998, p.118)

Três foram as principais conquistas das matemáticas durante os séculos XVII e XVIII: em primeiro lugar, a geometria analítica; em segundo, a matemática infinitesimal (cálculo diferencial e integral, séries de potências); e em terceiro e último lugar, a formação de um conceito fundamental das matemáticas, o conceito de função.

Observemos que a partir do momento em que os pesquisadores dispunham de ferramentas para desenvolverem as temáticas citadas acima, entre os séculos XVII e XVIII, o desenvolvimento científico destacou-se positivamente, uma vez que o contexto histórico permitiu que elas permanecem relevantes até a atualidade.

Foi um período de descobertas, científicas, comerciais, exploratórias como as das colônias americanas, religiosas com a reforma protestante, cultural com a figura dos mecenas, com investimentos nas áreas por meio dos mecenas ou de governantes interessados nas ciências praticadas pelos renascentistas que pensavam com ideias humanistas capazes de justificar os eventos da natureza. Vale salientar que, segundo Rossi (2001, p. 27) a “ciência moderna não nasceu no campo da generalização de observações empíricas, mas no terreno de uma análise capaz de *abstrações”*, tais conceitos abstratos foram capazes de justificar os fenômenos naturais por meio de conceitos físicos, que Rossi (2001) chama de *“matematização* da física”.

A matematização da física citada por Rossi (2001) auxilia com a compreensão de uma matemática que pode evidenciar os fatos narrados pela própria natureza propiciando descobertas e progresso, sendo considerada um recurso importante para o conhecimento científico, de modo que, por exemplo, os modelos de equações diferenciais que podem ser vislumbradas como um desses meios de justificação de tais fenômenos. Para Rossi (2001),

> A nova matemática que vem consolidando-se entre a primeira metade do século XVII e o começo do XVIII é sem dúvida o mais poderoso instrumento teórico que tenha sido construído pelos seres humanos no decorrer da história. (ROSSI, 2001, p.252)

Buscando compreender a matemática possuidora de instrumentos teóricos importantes para aquela época, desejamos assimilar o processo que conduziu Leibniz, em 1684, a referir-se – em uma publicação que tratava sobre máximos e mínimos, ou seja, tópico correspondente ao cálculo diferencial – sobre uma equação diferencial, quando tratava acerca da regra de multiplicação de funções deriváveis.

Um dos motivos para utilizar os primórdios das Equações Diferenciais está na tentativa de buscar na História da Ciência ou História da Matemática a compreensão dos contextos em que o seu desenvolvimento estava inserido, analisando a conjuntura histórica, no que tange os interesses políticos, religiosos, sociais, culturais e econômicos para a assimilação dos critérios que permitiram consolidar o entendimento inicial das ED's no século XVII e que se desdobrou até o século seguinte. Um autor que defende esta prática é Mendes (2015) ao afirmar que:

> As práticas socioculturais ao longo de toda a nossa história humana, os problemas surgem e os grupos sociais, em todas as suas formas de organização, tentam responder às questões evidenciadas por tais problemas. (MENDES, 2015, p. 62)

A procura de respostas para problemas em aberto, provocados pelos fenômenos naturais, é considerada pelo autor como a construção de uma epistemologia, no que tange a investigação acerca da produção de conhecimento. Essa história da ciência que analisa os fatores externos compactua com a ideia de examinar o contexto histórico de maneira mais ampla, pois busca entender os interesses ideológicos capazes de justificar a motivação que influenciou o direcionamento do desenvolvimento científico, para este trabalho, das equações diferenciais.

Naquele período, alguns estudiosos das matemáticas preocupavam-se em resolver dilemas correspondentes das ciências naturais, porém buscavam ferramentas capazes de solucioná-las, sendo assim, decidimos explorar uma cronologia desde Leibniz até Euler a fim de buscar as motivações para que sejamos capazes de compreender a maneira que os estudiosos pensaram cada modelo apresentado utilizando o conhecimento matemático existente na época. Para Alfonso-Goldfarb (1994),

> Os cientistas, diziam, mesmo aqueles envolvidos com ideias teóricas altamente abstratas não tinham como deixar de ser influenciados pelo meio social. E as necessidades, proibições ou discussões desse meio acabariam se refletindo na obra científica. (ALFONSO-GOLDFARB, 1994, p. 76)

A ideia da autora converge com o estudo das Equações Diferenciais, por ser um setor com conteúdos disciplinares pertencentes a um campo teórico denso e abstrato, por causa dos cálculos matemáticos realizados para resolver os problemas.

O objetivo deste trabalho é apontar alguns estudiosos das matemáticas do período entre meados do século XVII e XVIII, que contribuíram com o desenvolvimento das Equações Diferenciais, identificando as equações que provocaram alguns métodos de resolução.

O Cálculo Infinitesimal contribuiu com as ideias do Cálculo Diferencial e Integral e outra área de pesquisa que surgiu paralelamente foram as Equações Diferenciais, termo apresentado por Leibniz na *Acta Eruditorum* de 1684, segundo Struik (1969, p.4), embora tenham surgido em períodos próximos, as ED's eram tidas como outra área para ser pesquisada.

Também recorremos a Kline (1992) sobre os fatos históricos do século XVII, colaborando com a cronologia que promoveu o desenvolvimento da teoria, desde os primórdios, passando pela família Bernoulli, até as contribuições de Euler para resolução dos problemas existentes, como por exemplo, o da catenária, braquistócrona e isócrona.

Para Roque (2012, p. 209),

> A partir do final do século XVII, problemas como o "inverso das tangentes", estreitamente relacionados a estudos físicos, passaram a requerer uma curva como solução do problema cujo dado era a reta tangente. Isso quer dizer que a incógnita do problema passou a ser uma curva, uma lei de variação. O poder da arte da invenção de Leibniz para resolver problemas desse tipo foi, em grande parte, responsável pelo reconhecimento dessa arte como uma ferramenta fundamental da matemática. Esse tipo de problema faz intervir o que chamamos, hoje, de equação diferencial. (ROQUE, 2012, p. 209)

Para Leibniz, as curvas possuíam características entre suas coordenadas, dentre elas, as propriedades infinitesimais. Podemos citar a braquistócrona e a tautócrona como exemplos de arcos de cicloides invertidas que são modeladas por uma lei de formação com variações. Antes de Leibniz, estudiosos já versavam acerca da temática, é o caso de Christiann Huygens (1629 - 1695) – que se preocupava com o movimento pendular do relógio (isocronismo pendular) e – um dos possíveis motivadores de Leibniz.

Depois disso, os irmãos Bernoulli (Jakob e Johann) também se interessaram, mais tarde, Euler e assim vieram outros estudiosos que deram andamento às pesquisas. Segundo Kline (1992), os problemas que vieram posteriormente a definição de equação diferencial, Johan Bernoulli, que tinha o viés epistemológico de Leibniz, resolveu o problema da braquistócrona, em 1696, uma cicloide invertida que verifica o caminho percorrido por uma curva em menos tempo, dados dois pontos cuja equação é dada por $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a-y}{y}$..

A divulgação científica da renascença ganhou um aliado com a invenção da imprensa, ocorrida no final do século XV. Cartas e outros recursos de comunicação passaram a ser utilizados como forma de propagação das descobertas científicas da época, dentre eles, os periódicos, dos quais enfatizamos a *Acta* [3]*Eruditorum*, o qual serviu de transmissão para ascensão das Equações Diferenciais. É importante enfatizar que os estudiosos da época não confiavam plenamente na maneira de envio das correspondências, portanto, as cifravam para que as informações não fossem desviadas e chegassem nas pessoas erradas.

A seguir, trataremos sobre os métodos de resolução de Equações Diferenciais e os problemas que contribuíram com a criatividade dos estudiosos para que pudessem desenvolvê-los.

2. Alguns métodos de resolução de Equações Diferenciais

Como mencionado anteriormente, para uma pesquisa histórica, há necessidade de compreender o contexto em que as descobertas foram feitas, no que concerne acerca da economia, religião, sociedade e cultura para explorar os conceitos matemáticos, dentre eles, das Equações Diferenciais, juntamente com seus métodos de resolução. Portanto, faremos uso da História da Matemática para que possamos compreender os problemas surgidos durante a renascença,

[3] Segundo Burke (2003*), a Acta Eruditorum* foi uma revista criada no século XVII, em Leipzig, na Alemanha que abordava temas eruditos ou culturais como teologia, direito, medicina, matemática, história, dentre outros.

que culminaram com as ED's e o motivo de formular novas ferramentas capazes de solucioná-los.

A ideia de considerar o contexto histórico se dá pela necessidade de também compreender a criatividade matemática exigida para a resolução de problemas relacionados aos fenômenos naturais, dos quais suscitou no conceito das Equações Diferenciais, feito por Leibniz. Mendes (2022, p. 29) afirma que "a partir dos tipos de episteme em que ancoramos nossas maneiras de conformar nossas explicações históricas, tanto no modo de pesquisar, como no estilo de escrita da histórica". O autor defende que a episteme apresenta os meios de realização da pesquisa, além de difundir que os interesses epistêmicos do pesquisador devem ser considerados, por causa dos ideais que sua personalidade foi formada.

Conforme Miguel (1993, p. 113), para que

> A história da matemática possa efetivamente desempenhar o papel auxiliar na promoção de uma aprendizagem significativa, não podemos jamais nos esquecer de que a rede de significações que envolve as ideias matemáticas é, ela própria, uma construção social, uma vez que não só a atividade matemática, como toda atividade humana é uma experiência social construtora de significados. (MIGUEL, 1993, p. 113)

O autor afirma que as questões sociais são importantes para que a história da matemática tenha uma aprendizagem com significado, pois as atividades humanas fazem parte do contexto que o indivíduo está inserido.

Identificadas as Equações Diferenciais, seus métodos de resolução podem ter surgido por causa da necessidade que os estudiosos tinham para resolver problemas específicos, cuja construção do conhecimento foi conduzida no meio em que eles estavam inseridos e perceberam a necessidade de agirem para que obtivessem algum resultado, uma vez que as discussões não se prendem somente aos modelos diferentes de história do universo, mas à própria possibilidade de fazer daquela história o objeto de uma investigação científica, conforme enfatiza Rossi (1998).

De fato, a matemática infinitesimal corroborou diretamente com o desenvolvimento das equações diferenciais e seus métodos de resolução, pois estabeleceu algumas ramificações devido ao crescimento do conhecimento matemático, dado isso ampliou o caminho para que outras matemáticas fossem desenvolvidas. Além do mais, surgiram problemas técnicos acerca de Mecânica e Astronomia e que naquele momento, puderam ser resolvidos, devido ao surgimento desse cálculo.

A Enciclopédia Britânica (2022) define Equação Diferencial como uma **"**declaração matemática contendo uma ou mais derivadas— isto é, termos que representam as taxas de variação de quantidades que variam continuamente" cuja solução é formada por funções ou família de funções.

Wussing (1998) afirma que Newton e Leibniz precisaram, ou se utilizaram, do conhecimento do cálculo infinitesimal para operar seus problemas fazendo uso das equações diferenciais, proporcionando a ampliação de uma área que iniciou com o intuito de resolver questionamentos matemáticos (e físicos), considerados particulares e atingiu generalizações que temos, atualmente, como modelos matemáticos capazes de solucioná-los. Vale salientar que as soluções gerais e particulares das Equações foram evidenciadas em meados do século XVIII.

Em uma carta escrita a Huygens, no ano de 1691, Leibniz apresentou o método de resolução de uma ED por meio da separação de variáveis, com o modelo $\boldsymbol{y\frac{dx}{dy} = f(x)g(y)}$, cuja separação dessas variáveis deixa a igualdade da seguinte maneira $\boldsymbol{\frac{dx}{f(x)} = \frac{g(y)}{y}dy}$ que para resolver, basta integrar ambos os membros para encontrar sua resolução.

Anos mais tarde, em 1694, Leibniz tentou reduzir a equação diferencial linear de primeira ordem $\boldsymbol{y' + P(x)y = Q(x)}$ a quadraturas, por meio de mudanças de variáveis, porém, em 1695, Johann Bernoulli propôs um problema, cuja resolução foi por meio do que chamamos atualmente de Equação de Bernoulli e é definida como $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n}$ sendo melhorada por Leibniz e Jacques Bernoulli.

No mesmo ano, Leibniz e Johann Bernoulli introduziram o problema para encontrar uma curva ou uma família de curvas como a braquistócrona, isócrona e catenária que transpassam um ângulo dado a uma família de curvas dadas, e foi denominado de "trajetórias para curvas secantes", conforme Kline (1992, p. 630) cujas resoluções necessitaram do conhecimento das ED's. Roque (2012, p. 208) afirma que "a pesquisa em torno de fenômenos físicos relacionados a propriedades de curvas era comum na época e muitas vezes ligava-se ao desenvolvimento de artefatos técnicos".

Johann Bernoulli também descreveu a equação que modela o lançamento de um projétil em um meio cuja resistência é proporcional a uma potência da velocidade, e a equação que modelou para resolver o problema é uma variação da equação de Bernoulli, desenvolvida inicialmente, por Jacques Bernoulli e utilizada para resolução de outros problemas físicos. A equação é

$$\boldsymbol{m\frac{dv}{dt} - kv^n = mg}.$$

Isso Clairault publicou artigos entre 1739 e 1740 sobre o formato terrestre e modelava equações para resolver seus problemas, e nisto, apresentou a equação exata $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$.

E as condições para resolvê-la são que a equação deve ser exata se suas derivadas parciais forem iguais, ou seja, $\boldsymbol{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$. Kline (1992) também menciona que Euler, entre os anos de 1734 e 1735, escreveu sobre as condições de resolução de uma equação exata, além de identificar a necessidade de encontrar os fatores integrantes, caso as derivadas parciais fossem distintas. Mesmo com esta diferença de alguns anos, o método está relacionado aos dois pesquisadores.

Problemas correspondentes aos fenômenos físicos que geravam modelos de equações diferenciais de segunda ordem começaram a surgir no final do século XVII. Kline (1992, p. 635) cita que "Jacques Bernoulli se planteó el problema de la forma de una vela bajo la presion del viento, el problema de la velaria, lo que llevó a la ecuacion de segunda ordem $\boldsymbol{\frac{d^2x}{ds^2} = \left(\frac{dy}{ds}\right)^3}$, donde s es la longitud de arco"[4], como podemos observar, os inúmeros problemas que geravam modelos de equações diferenciais, sendo eles de primeira ou de

[4] Jacques Bernoulli colocou o problema da forma de uma vela sob a pressão do vento, o problema da vela, que levou à equação de segunda ordem d2x/ds2=(dy/ds)^3, onde s é o comprimento de arco.

segunda ordem, surgiam no mesmo período e os estudiosos procuravam resolvê-los.

Diferente da sequência sugerida pelos livros didáticos que abordam equações diferenciais, os problemas físicos e naturais não possuem a mesma ordem cronológica, pois para organização dos conteúdos disciplinares, possivelmente, perceberam a viabilidade da atual ordem utilizada, mesmo divergindo do contexto histórico, político, cultural, social e econômico que a problemática foi resolvida. Por exemplo, não esperaram desenvolver todos os métodos de resolução de equações de primeira ordem, para depois contribuírem com as soluções das de segunda ordem. Com isto, vale a afirmativa de Mendes (2009, p.46) que,

> A Matemática é um saber gerado pela sociedade humana e por consequência, possui uma história. Todavia, esse conhecimento, certamente, amplia-se em conteúdo escrita e simbologia ao longo do tempo, de forma não-linear, porém, traçada por controvérsias, debates, divergências, renovações e atualizações incessantes." (MENDES, 2009, p. 46)

Mendes (2009) corrobora o pensamento de que o desenvolvimento matemático ocorreu de maneira não linear, dos quais alguns perduraram por muitos séculos.

As equações de segunda ordem contribuem com soluções de problemas referentes às cordas vibrantes, que vinham se arrastando desde a Antiguidade, com os pitagóricos e que só no século XVII, período que os estudiosos tinham ferramentas suficientes para dar resposta aos questionamentos. É uma temática com diversas especificidades de como a vibração da corda pode ser feita, uma vez que para cada forma que a corda é vibrada, surge um tom distinto e os estudiosos perceberam a necessidade de estudá-los e aprofundar o assunto.

Taylor (1685 – 1731) desenvolveu uma equação de segunda ordem que resolve o problema de uma corda vibrante tensionada, cuja equação foi estabelecida por $a\ddot{x}^2 = \dot{s}y\dot{y}$, tomando $\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ e a variação em relação ao tempo. Já em uma correspondência trocada, em 1727, entre Johan Bernoulli e seu filho, Daniel Bernoulli acerca da corda elástica sem carga, carregada com n massas iguais e espaçadas igualmente, dado isso, modelaram a equação do movimento harmônico simples por métodos analíticos $\frac{d^2(x)}{dx^2} = -kx$. Kline (1992) cita que nem Taylor e nem Bernoulli estudaram equações de ordens superiores sobre as cordas vibrantes.

Os trabalhos sobre mecânica, mais precisamente, sobre o movimento pendular, o lançamento de projéteis com a resistência do ar, que eram estudados por Euler na terceira década do século XVIII exigiram que ele se interessasse por equações diferenciais de segunda ordem. Euler estabeleceu uma classe de equações de segunda ordem, reduzidas por meio de mudança de variáveis para as de primeira ordem, como podemos observar $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} d^2y$.

Em 1733, Daniel Bernoulli publicou um artigo intitulado "Teoremas sobre oscilaciones de cuerpos conectados por un hilo flexible y de uma cadena verticalmente suspendida" apresentando a equação diferencial de segunda ordem $a\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + y = 0$.

Daniel Bernoulli desenvolveu, porém de maneira pouco didática, conforme Klien (1992) o deslocamento em função do tempo, de modo que seu trabalho permaneça, do ponto de vista matemático, no campo das equações diferenciais. e o mesmo que os modos simples (os harmônicos), que ele explicitamente identificou como movimentos reais, podem ser sobrepostos para formar movimentos mais complicados.

Outro estudioso das matemáticas que também pesquisou sobre essas equações diferenciais foi Euler, ele é um dos seus primeiros trabalhos sobre a temática foi um artigo que tratava sobre a oscilação de fios flexíveis carregados com a quantidade arbitrária de pesos. Seus resultados são parecidos com os de Bernoulli, porém Kline (1992) afirma que são resultados mais claros.

Não podemos esquecer dos métodos de resolução de equações diferenciais por meio de séries de potências, tema que também é abordado nos cursos de educação superior e que possui importância para solucionar problemas físicos, sobre os fenômenos naturais, além de exercícios puramente matemáticos. Algumas equações diferenciais necessitavam do conhecimento de séries para serem solucionadas, podemos mencionar alguns estudiosos que se utilizaram desse tema como Newton que utilizou séries para resolver algumas integrais, além disso, utilizou-as para resolver equações diferenciais de primeira ordem. Leibniz, Euler e Wallis foram alguns dos pesquisadores que resolveram equações diferenciais por meio de séries.

Newton utilizou-se do conhecimento das equações diferenciais para tratar os sistemas de equações. com o intuito de resolver problemas que envolviam astronomia e a formulação de suas leis.

Sobre o método da variação de parâmetros, podemos observar que Euler, Laplace e Lagrange foram alguns dos estudiosos que escreveram sobre o método, porém os dois primeiros utilizaram para problemas particulares, e o terceiro generalizou o método para os diversos problemas das ciências naturais- como por exemplo, resolver problemas acerca do sistema solar- cuja equação diferencial estabelecida por Lagrange foi $Py + Qy' + Ry'' + \cdots + Vy^{(n)} = X$, com X, P, Q e R funções de x.

3. Considerações Finais

Como esperado, apontamos alguns estudiosos e os métodos de resolução de problemas que contribuíram com o desenvolvimento das equações diferenciais, tema que atualmente é uma área de pesquisa da Matemática e que possui suas particularidades.

Diversos problemas físicos e matemáticos ficaram sem solução, pois os pesquisadores não dispunham de ferramentas suficientes para resolvê-los, mas o advento do cálculo infinitesimal que culminou no Cálculo Diferencial e Integral criou artifícios para que tais questionamentos fossem elucidados por meio das equações diferenciais.

Com isto, descrevemos sucintamente o desenvolvimento de alguns métodos de resolução dessas equações, desde a primeira vez que foi citada por Leibniz até os sistemas de equações diferenciais, passando por equações lineares e não lineares de primeira ordem, equações de segunda ordem.

4. Referências

Burke, Peter. **Uma história social do conhecimento de Gutenberg a Diderot** / Peter Burke; tradução Plinio Dentzien. - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2003.

EQUAÇÃO diferencial. In: Encyclopaedia **Britannica**. Disponível em: https://www.britannica.com/science/differential-equation Acesso em: 15 novembro 2022.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem.** 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MENDES, I. A. **Usos da História no Ensino de Matemática: Reflexões teóricas e experiênciasentre trajetórias profissionais, epistemologias e ensino.** São Paulo: Livraria da Física, 2015.

MENDES, I. A. **História da Matemática no ensino: entre trajetórias profissionais, epistemologias e ensino.** São Paulo: Livraria da Física, 2022.

MICELI, Paulo. **História Moderna.** São Paulo:Editora Contexto, 2013.

MIGUEL, Antônio. **Três estudos sobre história e educação matemática**. 1993. [285]f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253114>. Acesso em: 17 agosto 2020.

KLINE, Morris**. El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días**, I. Madrid: Alianza Editorial, 1992.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSSI, Paolo. **O nascimento da ciência moderna na Europa** / Paolo Rossi ; tradução de Antonio Angonese. – Bauru; SP: EDUSC, 2001.

STRUIK, D. J. (editor), **A Source Book in Mathematics (1200-1800).** Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1969.

WUSSING, Hans. **Lecciones de Historia de las Matemáticas**. 1998.