OS MITOS E A REALIDADE NA DESCOBERTA DOS INCOMENSURÁVEIS: UMA REFLEXÃO SOBRE A HISTORIOGRAFIA NA MATEMÁTICA

Emerson Gordiano de Almeida[1]

RESUMO

A história dos números irracionais e das grandezas incomensuráveis persiste envolta em mitos e lendas, dentre essas, a mais famosa conta que os pitagóricos gregos teriam feito a descoberta ao aplicar o precioso Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo isósceles e se escandalizaram ao encontrar algo que não sendo um número inteiro, tampouco se expressava como uma relação de dois destes. A historiografia tradicional aponta que tal episódio se transformou num escândalo lógico que ficou conhecido como "crise dos incomensuráveis", neste trabalho fazemos uma discussão contrapondo autores e evidências que sustentam esse ponto de vista com outros que revelam o problema e a descoberta dos incomensuráveis como uma situação oportuna para a evolução da matemática.

Palavras-chave: Descoberta. Incomensuráveis. Irracionais. História. Anacronismos.

1. INTRODUÇÃO: DESFAZENDO ESTEREÓTIPOS

Talvez o maior desafio quando se estuda a evolução de um tema ao longo da história seja fazer a dissociação da percepção subjetiva e individual do contexto dos fatos. A dificuldade está no fato de que somos naturalmente imbuídos a interpretar a realidade a nossa volta segundo os nossos termos, mas quando se trata da pesquisa de fatos históricos, isso deve dar lugar discussão objetiva das afirmações, com fundamentação em evidências e possíveis ressalvas, somente assim podemos gerar elucidação de fatos importantes e convencimento.

No que diz respeito a história da matemática há diversos episódios em que os juízos de valor predominaram por muito tempo gerando certos mitos e lendas. Uma ilustração disto está na tendência de enquadrar toda matemática

[1] Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT. emersongordiano@gmail.com

pré-helênica como essencialmente empírica ou indutiva. Essa apreciação está em conformidade com os preceitos da filosofia grega e sua predileção aos aspectos lógico e formal das quais nossa prática matemática atual é herdeira. As relações das civilizações mais antigas com a matemática estão ligadas ao próprio processo de formação, por isso a ênfase inicial foi dada em torno da aritmética e mensuração, mas com o avanço das atividades administrativas surgiu um grupo social que detinha o conhecimento sobre os processos de impressão na argila e seria responsável por transmitir esse conhecimento aos jovens, futuros componentes dessa elite intelectual: o escriba. Esse mesmo traço pedagógico determinou uma tendência no sentido da abstração e de se estudar uma ciência por ela mesma.

Sob esse aspecto seria possível pensar que objetos abstratos como os números irracionais não fariam parte da cultura matemática desses povos, contudo hoje já se sabe que os babilônios tinham métodos procedimentais baseados em geometria para obter aproximações para números irracionais destacados como $\sqrt{2}$ e π, no Egito há evidências do uso do número de ouro na arquitetura da grande pirâmide. Com estas observações, devemos refletir que no passo dos séculos, a utilização particular de aproximações, obtidas por processos manuais e empíricos dos números irracionais para problemas numéricos específicos das civilizações da Antiguidade Oriental foi substituído pelos gregos do período clássico pela análise da consistência das grandezas incomensuráveis.

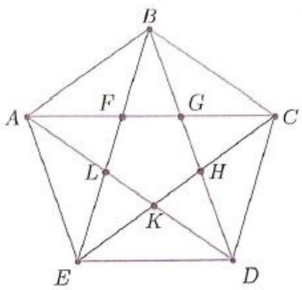
Os gregos Tales de Mileto e Pitágoras de Samos são as figuras mais antigas e nebulosas associadas com descobertas matemáticas específicas, isso porque os relatos de seus feitos sempre se dão por fontes indiretas e posteriores. Mileto e Samos, eram colônias gregas do extremo Leste da Bacia do Mediterrâneo, com localização próxima do Egito e da Mesopotâmia que por sua vez localizavam-se no Oriente Próximo, numa região cortada por muitos rios conhecida como Crescente Fértil e eram os mais proeminentes centros culturais da época e que já haviam produzido muita matemática no intuito de desenvolver a astronomia, agrimensura e arquitetura e isso naturalmente atraía os sábios e filósofos gregos.

Figura 1: Proximidade de Samos e Mileto da Babilônia e do Egito

Fonte: Eves (2004, p.130).

Uma evidência da conexão dos conhecimentos entre as civilizações do Oriente Antigo e a Grécia pode estar no símbolo da escola pitagórica: o pentágono estrelado ou pentagrama, figura presente na arte babilônia de acordo com tabletes e vasos que remetem a 3200 a.C. Esta figura é construída a partir das diagonais de um pentágono regular que se intersectam de modo que a medida do comprimento da diagonal está para a maior parte assim como a maior parte está para a menor. Os pontos determinados pelas interseções das diagonais constituem um novo pentágono regular no centro da figura original o que nos sugere, pelo menos em tese, que temos a possibilidade, de replicar a figura original indefinidamente procedendo infinitamente.

Figura 2: Modelo de pentagrama (pentágono regular e diagonais)



Fonte: Roque (2012, p. 81).

Euclides, em seu livro IV dos elementos, denomina esse processo de dividir um segmento em média e extrema razão, mas os gregos tinham tanto apreço por esse procedimento que designavam esse processo simplesmente por secção como se quisessem dizer que essa era a - única - forma adequada de particionar um segmento de reta.

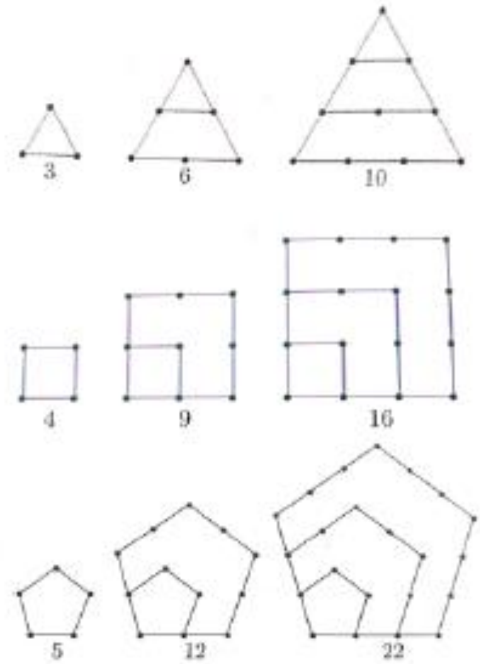
Versões contam que Hipaso de Mataponto no século V a.C., teria feito a descoberta da incomensurabilidade por meio do pentagrama, enquanto criava uma série de pentágonos e pentagramas encaixados indefinidamente com tamanhos cada vez menores. Neste caso pode-se provar que o lado e a diagonal do pentágono não admitem uma unidade comum, isto é não são comensuráveis, uma vez que admitindo uma unidade para mensurar ambas, por menor que ela seja, sempre podemos repetir o processo, obtendo um pentágono com diagonais e lados menores que a unidade estabelecida. Desta forma, ao invés $\sqrt{2}$ teria sido $\sqrt{5}$, o pivô da descoberta incomensurabilidade, contrariando as versões mais tradicionais que vinculam tal descoberta a um conhecimento geométrico do que os gregos não dispunham a época, provocando um escândalo lógico.

2. DISCUTINDO A CRISE DOS INCOMENSURÁVEIS

É consenso que a descoberta dos incomensuráveis se deu no seio da escola pitagórica, mas dentro da narrativa tradicional, depararmo-nos com o relato de um escândalo lógico que tal descoberta teria desatado e ocasionado uma crise dentro da matemática da época. Os argumentos que sustentam essa versão e os que se opõem a ela, levam em conta que a escola pitagórica, mais do que um grupo de matemáticos, compunha-se como uma seita adepta a visões esotéricas e místicas sobre o papel dos números na explicação do cosmos ao contrário dos demais filósofos da época que estabeleciam os elementos físicos como a causa de tudo.

O lema pitagórico “tudo é número" pode parecer-nos até um tanto chistosa do nosso ponto de vista atual já que se contradiz com fato de que para os pitagóricos apenas os naturais recebiam o status de número, sendo as frações não um ente único existente por si só, mas uma relação entre inteiros. A aritmética dos inteiros era estabelecida por meio da manipulação de certas configurações geométricas que representavam esses números, chamados de figurados.

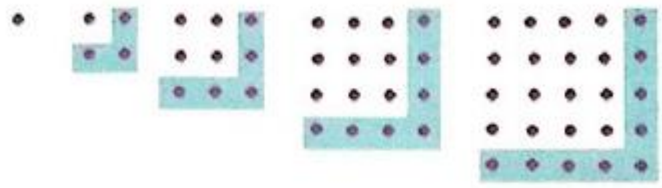
Figura 3: Números figurados



Fonte: Roque (2012, p.66 e 67).

Segundo Roque e Carvalho (2012), informações como “todo número quadrado é obtido por meio da soma de dois triangulares consecutivos" eram obtidas de forma visual. Assim nos dias de hoje há uma discussão quanto ao Teorema de Pitágoras ter sido desenvolvido de fato por Pitágoras ou qualquer um de seus discípulos, o que pelo costume da época, iria render-lhe os créditos de igual maneira. É sabido que os babilônios já tinham conhecimento sobre as ternas pitagóricas evidenciando que a relação entendida hoje como o Teorema de Pitágoras era pelo menos parcialmente conhecida possivelmente desde o século XVIII a.E.C. De qualquer forma o certo é que o Teorema de Pitágoras dentro da escola pitagórica não teve tratamento geométrico.

Figura 4: Gnomons da aritmética pitagórica



Fonte: Roque (2012, p.69).

Por meio desse fato, podemos lançar mão dos questionamentos sobre a suposição do trauma da descoberta dos incomensuráveis, uma vez que $\sqrt{2}$ teria surgido da aplicação do Teorema de Pitágoras no cálculo da diagonal do quadrado. A concepção pitagórica previa que existissem dois inteiros cuja razão resultasse em tal número, mas com esta suposição os pitagóricos chegavam inevitavelmente a um paradoxo sobre a paridade desses inteiros. O escândalo atribui-se ao impasse que teria acometido os pitagóricos: ou estavam eles diante de uma entidade que fugia a suas explicações, pois não era um número inteiro e tampouco se exprimia pela razão de outros inteiros ou seriam as suas crenças que estariam equivocadas. As lendas a favor dessa versão contam que Hipaso de Mataponto, a quem se atribui a descoberta, foi jogado ao mar por ter tido o atrevimento de produzir algo no Universo que seria inexplicável pela lógica dos números, outras versões contam que ele foi expulso da seita e ainda em vida teve seu túmulo erigido como indicativo de que estava morto por tamanha blasfêmia.

Segundo Gonçalves e Possani (2009), a tese que defende o escândalo conta com autores da Antiguidade, que fazem deferência ao fato. A figura de Pitágoras como matemático chega a nós por meio de Proclo (485 d.C.) que lhe faz referência por meio de um escrito de história da geometria devida a Eudemo (320 a.C.) cujo texto original não se tem notícia, mas se supõe que Proclo tinha uma cópia deste quando fez a citação.

> “Após esses, Pitágoras transformou a filosofia sobre ela [a geometria] em um esquema de educação liberal, procurando os princípios dela a partir do alto e perseguindo os teoremas de um modo imaterial e intelectual; e ele descobriu então tanto o

> assunto dos irracionais como a construção dos esquemas cósmicos [isto é, os sólidos regulares]" (PROCLO apud. Gonçalves e Possani, 2009, p.17-18)

Jâmblico (330 a.C) é um outro autor que faz menção aos fatos, dizendo que seria Hipaso de Metaponto (470 a.C) um usurpador da fama da descoberta da incomensurabilidade na ocasião de uma investigação geométrica sobre o dodecaedro regular, comunicando esta descoberta a pessoas comuns, consideradas indignas da revelação o que se constituía como crime contra a seita e justificaria sua terrível punição - afogamento ou ostracismo. Temos ainda Papus de Alexandria que faz menção aos fatos, mas interpreta a punição de forma conotativa.

> “Esta ciência (ou conhecimento) teve sua origem na seita (ou escola) de Pitágoras, mas passou por um importante desenvolvimento nas mãos do ateniense, Teeteto[...]. De fato, a seita (ou escola) de Pitágoras foi de tal forma afetada por sua reverência por essas coisas que uma história tornou-se corrente nela, a saber, aquele que primeiro desvendou o conhecimento de inexprimíveis ou irracionais e o divulgou entre a massa de gente comum pereceu por afogamento; o que é mais provavelmente uma parábola pela qual eles procuraram expressar sua convicção de que, primeiro, é melhor esconder todo inexprimível, ou irracional ou inconcebível no universo e, segundo, a alma que por erro ou descuido desvela ou revela qualquer coisa dessa natureza que esteja nela ou neste mundo, vaga (por isso) aqui e ali no mar da não-identidade (isto é, carecendo de toda similaridade de qualidade ou acidente), imersa no fluxo do vir-a-ser e do deixar-de-ser, onde não há padrão de medida." (PAPUS apud. Gonçalves e Possani, 2009, p. 18)

Por fim temos Oscar Becker que em seus estudos aponta para uma sequência de proposições do livro IX de Euclides referentes a paridades dos inteiros que aparentavam vir de uma tradição mais antiga e mais simples que os demais livros e seriam, portanto, uma sistematização lógico-dedutiva da aritmética pitagórica. Com isso ele sustenta que o pitagorismo teria conhecimento suficiente para elaborar a prova por absurdo da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado como anunciada por Aristóteles, tal prova a afrontava à doutrina primeira de explicar tudo por meio de inteiros.

O primeiro argumento a ir contra a versão do escândalo lógico sustenta-se no fato de as fontes que fazem referência a Pitágoras serem sempre posteriores e algumas bem posteriores: enquanto as descobertas são alocadas ao século V a.E.C., bem como a existência de Pitágoras, os escritos de Jâmblico localizam-se cerca de oitocentos anos depois ao passo que o relato de Proclo, fonte mais segura em defesa de Pitágoras como matemático, segundo Gonçalves e Possani (2009), está praticamente mil anos a frente. Suspeita-se que haja interpolações anacronísticas e mal entendidos por conta de gregos posteriores. Não havia por exemplo, razão para Eudemo, enquanto destacado discípulo de Aristóteles, referir-se a matemática de Pitágoras por meio dos termos imaterial e intelectual, enquanto seu mestre distinguia os pitagóricos dos verdadeiros matemáticos porque esses últimos aplicavam suas proposições a corpos. Outra contestação nessa linha é de que o texto de Proclo parece mais uma reformulação de Jâmblico no *De communi mathematica scientia* quando este se refere a pureza, sutileza e exatidão do método de Pitágoras e a como sua matemática purifica a alma e a conduz para os mais altos princípios e para o reino do ser puro e imaterial dando sentido ao uso dos termos imaterial e intelectual por parte de Proclo.

De acordo com Gonçalves e Possani (2009) já é um consenso dos historiadores da matemática e da filosofia grega que Proclo interpolou o texto de Jâmblico no de Eudemo, porque originalmente este falava pouco ou nada de Pitágoras, colocando em xeque a ideia de que seria verdadeiramente um matemático ou uma invenção de neopitagóricos como Jâmblico (que viveu 800 anos depois de seu mestre).

Os textos de Jâmblico não são claros em diversos aspectos! Não se sabe se Hipaso teria sido o único delator da descoberta dos então nomeados *alogos* - inexprimível ou *aratos* – não tendo razão ou se haveria outros. Também não se consegue obter qualquer ligação entre a construção do dodecaedro e o problema da incomensurabilidade o que para um neopitagórico como ele seria de máxima importância elucidar. Atualmente existe também a suspeita de que os pitagóricos conhecessem o dodecaedro apenas de forma empírica e nunca chegaram a construí-lo. Essa teoria é levantada por Eva Sachs e se apoia em evidências arqueológicas: existência de dodecaedros de bronze já nos séculos IX ao VI a.C.

Os próprios pitagóricos não deixaram escritos, possivelmente apoiados na ideia que suas descobertas ficariam retidas na memória daqueles que merecessem tomar conhecimento delas como Plutarco, o historiador, traz em seu relato. Aliás Plutarco que é anterior a Jâmblico e seu contemporâneo, Papus de Alexandria, não apresentam qualquer menção a uma crise entre incomensurabilidade e a teoria pitagórica de que tudo é número, além de dar uma interpretação alegórica as punições sofridas pelos delatores dos feitos dentro da seita.

Outro ponto levantado contra a crise dos incomensuráveis é o fato dos autores não fazerem uma ligação clara do contraste entre a incomensurabilidade e a filosofia de que tudo é número. Para Gonçalves e Possani (2009), isso exigiria a conexão de três requisitos por parte dos pitagóricos: a oposição entre pares e ímpares o que é um consenso entre os historiadores, uma aritmética capaz de demonstrar teoremas sobre pares e ímpares e aqui já não há mais consenso pois sabe-se que a aritmética no pitagorismo não tinha um tratamento lógico-dedutivo e por fim uma prova da incomensurabilidade que recorresse a pares e ímpares, o que Burkert (1962) apud. Gonçalves e Possani (2009) aponta como impossível no seu trabalho de reprodução com seixos das provas indutivas e pictóricas típicas do pitagorismo que recorria aos padrões visuais para dispor as pedrinhas e representar os números. Como representariam $\boldsymbol{a^2 = 2b^2}$?

Uma prova por redução ao absurdo, presente em manuscritos do livro X dos Elementos de Euclides, atribuída a Aristóteles mostra que ele tinha conhecimento de que a suposição da comensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado conduzem a contradição de números pares serem iguais a números ímpares. Para o pitagorismo, isto não seria essencialmente uma contradição, já que o número um, a unidade, é ao mesmo tempo par e ímpar, portanto da suposta demonstração por absurdo poderia simplesmente levar a conclusão que cada número é feito de unidades e carrega dentro de si, o par e o ímpar. De qualquer forma Aristóteles não faz qualquer menção a crise dos incomensuráveis dentro do pitagorismo, ainda que lhes dedique uma forte crítica em sua Metafísica.

Gonçalves e Possani (2009) indicam que a geometria grega dispunha de uma ferramenta que lhes permitiria lidar com a incomensurabilidade sem crise alguma: a antifairese. A etimologia da palavra antifairese remete ao grego antigo anti-hypo-hairesis que significa literalmente subtração recíproca. A antifairese permite definir e comparar razões sem a necessidade dos conceitos de número racional, fração ou relação de proporções. O procedimento era empregado na aritmética do século V a.E.C., segundo o peripatético *De lineis insecabilibus* atribuído a Aritóteles. Alguns estudiosos afirmam que por trás dos livros II e X dos Elementos haveria um interesse de estudar a antifairese de razões quadráticas.

Em se tratando ainda dos Elementos, no livro X, a versão aritmética da antifairese que ficaria conhecida como lema de Euclides, estabelecendo um paralelo entre coprimos e incomensuráveis. Nas palavras de Roque e Carvalho (2012), o objetivo deste volume da obra de Euclides seria distinguir números que tem uma boa antifairese dos que tem uma má antifairese, o que basicamente significa verificar quando o mdc de dois números é diferente de 1. No caso geométrico, duas grandezas estariam na mesma razão quando possuem a mesma antifairese, isto quer dizer que ambas poderiam ser medidas com uma unidade comum, enquanto que se as diferenças não terminam nunca, isto é, o processo é não finito, as grandezas são incomensuráveis.

Vamos empregar esse procedimento para concluir a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado.

Seja um quadrado ABCD, tomemos um ponto B_1 sobre a diagonal AC tal que $B_1C = AB$. Sobre B_1 baixemos uma perpendicular a AC, definindo C_1 na interseção entre o lado AB e esta perpendicular. Traçamos C_1D_1 e AD_1 paralelas a AB_1 e B_1C_1 respectivamente, definindo o ponto D_1 na interseção destas duas retas. Observe que de fato temos um quadrado: $AB_1 \perp B_1 C_1$ por construção, AD_1 é paralelo a $B_1 C_1$, então $AD_1 \perp AB_1$ e como D_1C_1 é paralelo a AB_1 podemos concluir que os dois últimos ângulos determinados por esses segmentos são retos também. O triângulo AB_1C_1 é isósceles de base AC_1, pois sendo AC diagonal de ABCD, $B_1AC_1 = 45°$ assim temos $AC_1B_1 = C_1AD_1 = AC_1D_1 = 45°$, o que acarreta na congruência dos triângulos AB_1C_1 e AD_1C_1 pelo caso LAAo (lado/ângulo/ângulo oposto), garantindo a igualdade dos quatro lados.

Fizemos $BC = B_1C$, logo BCB_1 é isósceles com $B_1BC = CB_1B$, mas sendo assim $BB_1C_1 = C_1B_1B$, pois ambos são complementos de um ângulo reto. Assim,

$$AB_1 = AC - B_1C = AC - AB$$

$$AC_1 = AB - BC_1$$

$$= AB - B_1C_1$$

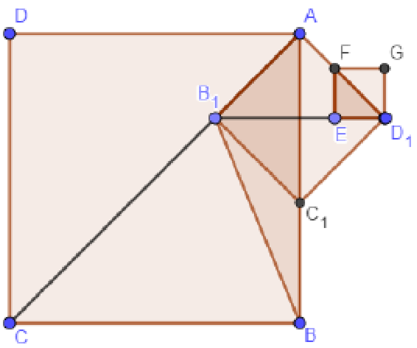
$$= AB - AB_1$$

$$= AB - AC + AB$$

$$= 2AB - AC.$$

Sendo assim, supondo o segmento AP como unidade de medida, se AB e AC são comensuráveis em relação a AP, AB_1 e AC_1 também serão.

Figura 5: Antifairese diagonal x lado do quadrado



Fonte: o autor (2020, p. 97).

Após “n” iterações desse processo, podemos tornar essas quantidades ainda menores, até o ponto de obter um quadrado de lado ABn e diagonal ACn cujos comprimentos serão menores que AP por menor que esta seja. Assim a escolha de AP e a suposição de AB e AC comensuráveis nos leva a ABn < ACn < AP, de modo que a diminuição da unidade de medida AP implicaria na possibilidade de construir algum quadrado cujas dimensões são inferiores a AP, forçando-nos a conclusão de que AB e AC são incomensuráveis.

3. EVOLUÇÃO A PARTIR DOS INCOMENSURÁVEIS: TEORIA DAS PROPORÇÕES DE EUDOXO.

Enquanto existe uma discussão para verificar a ocorrência ou não de uma crise nos fundamentos do pitagorismo, não resta dúvida que essa descoberta ocasionou uma cisão entre o tratamento das grandezas e o universo dos números de forma definitiva ou em termos mais atuais a separação entre aritmética e geometria, assim aconteceu com o problema dos incomensuráveis o que geralmente acontece na matemática: motivação para descobertas interessantes e novos desenvolvimentos.

A existência de grandezas incomensuráveis demandava uma teoria de razões e proporções que fosse além da igualdade de números, uma vez que esta não era suficiente para explicar os fatos envolvendo incomensuráveis, já que a razão de incomensuráveis não podia estar associada a razão de suas medidas.

Os Elementos de Euclides mostra-nos uma teoria das proporções devida ao platônico Eudoxo que sobrepunha a ideia de razão de números pela razão de grandezas e desatando o nó de dificuldades no tratamento dos incomensuráveis. Na verdade, encontramos várias definições de razão nos Elementos de Euclides e isso se deve principalmente ao fato de esse tratado estabelece a estrutura lógico dedutivo mínima (ao ver de Euclides) da geometria plana (livros I a VI), espacial (livros XI a XIII) e teoria dos números (livros VII a IX), sempre fazendo um tratamento separado dos números e das grandezas.

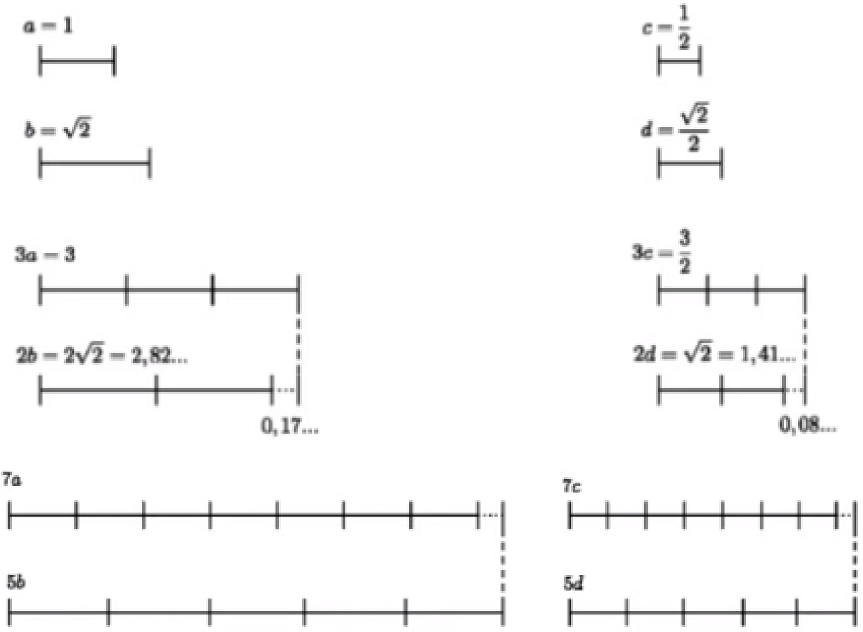
No livro VII (contexto aritmético) encontramos a definição a : b :: c : d (lê-se a está para b assim como c está para d) enunciado como segue: “as áreas dos retângulos ad e bc se equivalem” o que escrevemos em notação atual como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ab = cd$.

Porém essa definição vale apenas para segmentos comensuráveis. No livro encontramos um conjunto de quatro definições que dão fundamento a teoria das proporções de Eudoxo. A primeira estabelece razão como relação de tamanho de duas grandezas do mesmo tipo, isto faz referência a homogeneidade das grandezas, já que no contexto grego, o manejo de segmentos de reta se dava somente entre segmentos de reta, áreas entre áreas e assim por diante de modo que a natureza das grandezas deve ser observada. A segunda diz que se duas grandezas possuem uma mesma razão entre elas podem ultrapassar-se mutuamente quando multiplicadas, o que equivale em nossa notação a $\exists m, n \in \mathbb{Z}$, tais que $ma > nb$, assim fica estabelecido um critério operatório para determinar se duas grandezas possuem uma razão. A terceira definição traz um critério para comparar duas razões entre grandezas. Em linguagem atual, traduz-se como: as grandezas homogêneas a, b, c, d são proporcionais, se e somente se, para todo par de inteiros positivos m e n temos um dos casos:

$i)\ ma < nb \Rightarrow mc < nd$. $ii)\ ma = nb \Rightarrow mc = nd$. $iii)\ ma > nb \Rightarrow mc > nd$.

Esta definição nos diz que um conjunto de grandezas está em proporção quando a primeira e a terceira são expandidas ou contraídas pelos mesmos inteiros da mesma forma que a segunda e a quarta. Vejamos um exemplo: tomando $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$ e $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ao multiplicar a e c por 7 e b e d por 5 observamos que $7a < 5b$ assim como $7c < 5d$. Se procedemos analogamente utilizando os inteiros 2 e 3, percebemos que $2b < 3a$, bem como $2d < 3c$.

Figura 6: Ilustração da definição de proporção de Eudoxo



Fonte: Roque (2015).

Assim Eudoxo introduziu uma noção de razão de grandezas puramente geométrica e distinta da razão entre números, de modo que a segunda é um caso particular da primeira (sempre que as grandezas forem comensuráveis). Por fim na última definição é estabelecido que grandezas que estão na mesma razão são chamadas proporcionais.

Roque e Carvalho (2012), apontam que alguns historiadores acreditam que a definição eudoxiana de proporção teria inspirado Dedekind a elaborar a teoria dos cortes. De fato, podemos observar que a definição de Eudoxo produz um corte de racionais, mas não há registros de que Dedekind tenha obtido seus resultados a partir de Eudoxo. Reescrevendo os itens I e III da ideia de Eudoxo, segundo uma interpretação moderna, podemos vislumbrar conexões entre Eudoxo e Dedekind.

Sejam $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ inteiros e $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$ em que $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$ são números quaisquer, temos:

$$\boldsymbol{I)}\ \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} \qquad \boldsymbol{II)}\ \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} > \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}}\ \boldsymbol{e}\ \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} > \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}} \qquad \boldsymbol{III)}\ \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} < \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}}\ \boldsymbol{e}\ \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} < \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}}$$

Por II entendemos que existem infinitos racionais $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}}$ simultaneamente a esquerda de $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ e de $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$ e por III pensamos nos racionais $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}}$ a direita de $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ e de $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$. Pela proporcionalidade de $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ e $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$ de sabemos que não há qualquer racional entre os dois o que nos leva a concluir que a b produz um corte que é único e serve para Dedekind definir os números reais, o que seria feito cerca de 2000 anos depois.

4. CONCLUSÃO

Diante de uma conexão tão duvidosa entre a filosofia pitagórica e a descoberta da incomensurabilidade, colocamos em xeque o vislumbre das grandezas incomensuráveis no seio do pitagorismo. Não há sequer certeza da relação entre o Teorema de Pitágoras e a descoberta dos irracionais visto que os babilônios e chineses conheciam o Teorema, mas não chegaram nos irracionais. O mais palpável é que na Grécia tenha ocorrido o mesmo e a incomensurabilidade tenha sido abordada primordialmente como um problema da Geometria livre sem essa carga filosófica que lhe atribuem, já que o grau de sofisticação deste tema não permitiria surpreender ninguém que não fosse suficientemente instruído em matemática.

Muito provavelmente tenhamos sustentado a visão a favor da versão “descoberta dentro da aritmética pitagórica" baseado no espanto que nós, fruto de uma matemática mais recente, sentimos com a existência de grandezas incomensuráveis que é absolutamente contraintuitiva: como não imaginar que duas grandezas físicas sempre terão uma unidade em comum? De modo que a crise dos incomensuráveis é muito mais um processo anacrônico da historiografia que se deu quando os intérpretes fizeram a leitura dos personagens e fatos históricos não nos termos destes, mas nos seus próprios.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, E. G. **Onde estão os números irracionais?** 2020. 163f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana , 2020.

EVES, H. **Introdução a história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 3ª edição. Campinas, SP. Editora da UNICAMP, 2004. 844p.

GONÇALVES, C. H. B.; POSSANI, C. **Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga**. Matemática universitária. v.47, p.16- 24, 2009.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. Tópicos de história da Matemática. 1ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade brasileira de Matemática, 2012.

WAYNE, C. B.; COLOMB, G. G.; WILLIAMS, J. M. **A arte da pesquisa**. Tradução de Henrique A. Rego Monteiro. 2ª edição. São Paulo: Martins Fontes, 2008. 351 p.