



## PRODUTOS NÃO COMUTATIVOS: o caso dos quatérnios de Hamilton

Débora Ferreira<sup>1</sup>

Gert Schubring<sup>2</sup>

### RESUMO

O matemático irlandês William Rowan Hamilton é celebrado, entre outros fatores, pelo seu desenvolvimento de um conjunto numérico cujos elementos são denominados quatérnios, e de operações entre esses elementos, algumas das quais se assemelham às operações de produto interno e produto vetorial da matemática contemporânea. É de sua iniciativa também o primeiro uso do termo “vetor” em sentido análogo ao atual. O objetivo do presente trabalho é apresentar um panorama do desenvolvimento dos quatérnios de Hamilton, analisar a importância da criação desse conjunto para a álgebra moderna e relatar nossa experiência ao acessar alguns dos escritos originais do matemático. Em viagem a Dublin, consultamos a seção de manuscritos do Trinity College, instituição onde Hamilton estudou e em que estão guardadas as maiores coleções de seus documentos. Com base em arquivos selecionados dessas coleções, pretendemos contribuir para o surgimento de mais indagações sobre seu trabalho e motivações para o desenvolvimento de novas teorias.

**Palavras-chave:** William Rowan Hamilton. Quatérnios. Manuscritos. Trinity College Dublin. História da Matemática.

### A comutatividade da multiplicação

Dizemos que certo tipo de multiplicação possui a propriedade comutativa quando se pode sempre trocar a ordem dos fatores sem ter o resultado alterado, isto é, quando  $a \times b = b \times a$  para todo o caso. Durante o século XIX, foram desenvolvidos alguns produtos não comutativos; a concepção desses produtos constituiu uma superação de um paradigma firmemente consolidado na matemática, a saber, o de que as propriedades observadas nas operações aritméticas com números reais deveriam continuar válidas para todo o caso. A ideia de que a comutatividade deveria ser válida para a operação de multiplicação era primeiramente assumida, sem ser formalmente enunciada. O primeiro texto que encontramos falando explicitamente sobre essa propriedade da multiplicação é

---

<sup>1</sup> Doutoranda da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Docente do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ). E-mail: debora\_ml@hotmail.com.

<sup>2</sup> Docente da Universität Bielefeld, Alemanha. Docente da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). E-mail: gert.schubring@uni-bielefeld.de.



o *Nouveaux Éléments de Géométrie*, de 1667, do matemático, filósofo, padre e teólogo francês Antoine Arnauld (1612-1694). No entanto, Schubring (2002, p. 39) destaca que a posição de Arnauld de, em seu texto, postular a comutatividade da multiplicação não estava bem fundamentada:

... de um lado, uma axiomática da Aritmética foi desenvolvida sistematicamente somente no século XIX e, de outro, ele afirmou tratar das grandezas em geral, mas o texto dele referiu-se realmente somente aos números.

As grandezas, no entanto, apresentaram problemas profundos que nunca foram claramente resolvidos. (SCHUBRING, 2002, p. 39)

Já a quebra de paradigma mencionada, a inovação de se admitir uma álgebra não comutativa, é comparada por Crowe ao desenvolvimento das geometrias não-euclidianas:

Em certo sentido pelo menos, a descoberta de Hamilton marcou época, pois os quatérnios foram o primeiro sistema numérico consistente e significativo conhecido que não obedecia às leis da aritmética comum. Sua descoberta “curiosa, quase selvagem” (como ele a chamava) pode ser comparada à descoberta da geometria não-euclidiana. Ambas as descobertas quebraram laços estabelecidos por séculos de pensamento matemático. Imediatamente após 1843, outros novos sistemas numéricos foram descobertos por Augustus De Morgan (que publicou cinco novos sistemas), John T. Graves (1844) e Charles Graves (1846). (CROWE, 1994, p. 30-31, tradução nossa)

A metodologia utilizada no presente trabalho será a hermenêutica objetiva, uma vez que tentaremos analisar os acontecimentos históricos não apenas explorando o quadro geral do contexto da concepção dos quatérnios; mas também nos esforçaremos por compreender os processos mentais que o levaram a esse resultado. O conceito de hermenêutica aqui utilizado será similar ao considerado por Schubring em seu artigo *O que é ao que serve a Hermenêutica?* (2018) e na obra *Análise histórica de livros de matemática: notas de aula* (2003, p. 14-15), levando em conta também a história social das ideias.

### **A criação dos quatérnios**

De fato, o século XIX viu frutificar diferentes tipos de álgebra, em que não eram percebidas todas as propriedades válidas para a álgebra dos números reais. Um exemplo de conjunto possuindo uma multiplicação em que não vale a comutatividade foi o caso dos denominados quatérnios, números idealizados



pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), compostos por três unidades imaginárias e uma unidade real.<sup>3</sup>

Hamilton havia publicado em 1835 um artigo denominado *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time*. Nele, Hamilton tratava dos números complexos  $a + bi$  como pares ordenados  $(a, b)$  de números reais, chamados por ele *number couples*, e, a partir dessa abordagem, definiu as operações de soma e de multiplicação entre esses números, coincidindo com as operações entre complexos: dados dois *number couples*  $(x, y)$  e  $(a, b)$ , teria-se

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

$$\text{e } (x, y) \times (a, b) = (xa - yb, xb + ya).$$

Hankins (1980, p. 263-264) ressalta que, para Hamilton, um número complexo escrito como a soma de uma parte real com uma parte imaginária não fazia sentido, por ele até então não admitir significado para uma soma de termos de naturezas diferentes. Já os *number couples* seriam um novo tipo de número, para os quais se poderia definir operações, desde que essas fossem consistentes (HANKINS, 1980, p. 264) e (HANKINS, 2018).

Com essa associação feita por Hamilton dos números complexos com *number couples*, e com a relação também já explicitada por diferentes matemáticos dos números complexos como pontos do plano<sup>4</sup>, uma questão que pareceu natural a Hamilton foi se seria possível construir uma álgebra de *triplets* associada ao espaço tridimensional, com números do tipo  $a + bi + cj$ , em que  $i$  e  $j$  seriam unidades imaginárias. Hamilton intuía que, caso tal álgebra existisse, ela teria muitas aplicações práticas; e ele tentou durante aproximadamente treze anos desenvolver esses *triplets*. Todavia, Hamilton se deparava com muitos obstáculos nas suas tentativas de criação desses novos números que o faziam

---

<sup>3</sup> Outros exemplos de produtos não comutativos foram desenvolvidos pelo matemático alemão Grassmann, na mesma época, e serão mencionados na próxima seção.

<sup>4</sup> A representação geométrica de números complexos era ainda algo muito recente, tendo sido desenvolvida independentemente por vários matemáticos como Wessel (1797), Argand (1813), Warren (1828) e Gauß (1832). Hamilton tomou conhecimento do assunto através do livro de Warren de 1828 (Hankins, 1877, p. 177).



recuar e se esforçar em outro tipo de abordagem, como: a não validade da propriedade distributiva ao tentar multiplicar duas linhas em um espaço de três dimensões, o resultado do produto de dois *triplets* não nulos ser zero, a ambiguidade na divisão entre dois desses números e também o produto do módulo de dois triplets não ser igual ao módulo do produto dos mesmos (HANKINS, 1980, p. 284) e (HANKINS, 2018).

Em 16 de outubro de 1843, Hamilton concebe os quatérnios, que seriam números da forma  $a + bi + cj + dk$ , com  $i, j, k$  sendo unidades imaginárias e  $a, b, c$  e  $d$  números reais. Para esses números o matemático conseguiu definir a operação de multiplicação com todas as propriedades que eram observadas nos números reais, com exceção da comutatividade. Para isso, Hamilton considera:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1;$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j;$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

E, de fato, podemos observar acima que, ao trocar de posição duas unidades imaginárias distintas, o resultado muda de sinal.

Refletindo sobre o significado desse número que poderia ser associado não a um *triplet*, mas a algo composto de quatro coordenadas, Hamilton relaciona as partes imaginárias ao espaço físico ou espaço tridimensional, e a parte real ao tempo.

### **Mais desdobramentos dos produtos não comutativos**

Na mesma época do desenvolvimento dos quatérnios de Hamilton, foram desenvolvidos (com escritos a partir de 1840) diversos tipos de produtos, sendo alguns não comutativos, pelo alemão Hermann Günther Graßmann (1809-1877). Graßmann propôs multiplicações entre as denominadas quantidades extensivas, que seriam ‘combinações lineares’ de unidades relativas (estas últimas seriam unidades básicas, de qualquer natureza, ‘linearmente independentes’) (GRASSMANN, 1855, p. 124-126). Em sua obra prima, *Die Lineale*



*Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik* (ou, como também é conhecido, o A1), Graßmann conceitua produtos do tipo interno, externo e regressivo entre essas quantidades extensivas. E, entre outros trabalhos em que desenvolve diferentes tipos de multiplicações, destacamos o artigo *Sur les différents genres de multiplication* (1855), publicado no *Jornal de Crelle*, em que Graßmann cria dezesseis produtos diferentes!

Além do desenvolvimento matemático introduzido com seus novos conceitos, a importância do produto entre quatérnios de Hamilton e da multiplicação entre quantidades extensivas de Graßmann está no fato de eles terem semeado a ideia de que novas álgebras poderiam ser construídas, com propriedades distintas daquelas encontradas no conjunto dos reais com as operações usuais. Tais inovações resultaram, como já mencionado, em uma quebra de paradigma e possibilitaram novas descobertas. Contudo, como a propriedade comutativa estava fortemente consolidada na mente dos cientistas (e da sociedade em geral), houve reações adversas a esse novo modo de fazer matemática. Crowe (1994, p. 34) relata que mesmo matemáticos correspondentes de Hamilton como De Morgan, MacCullagh e John Graves mostraram alguma resistência à ideia de um produto não comutativo; no entanto, o autor destaca que isso é, de fato, o que usualmente acontece com novos sistemas de ideias.

Como ilustração, podemos citar uma carta de Hamilton para o Reverendo Mortimer O'Sullivan, de 4 de agosto de 1853 (aniversário de 48 anos de Hamilton!), em que o matemático conta a esse seu amigo que já havia sido até censurado ou ridicularizado pelo que as outras pessoas consideravam suas “monstruosas inovações”. Na correspondência ele cita um certo Lord Rosse que, em refeição particular com sua própria esposa e Hamilton, teria feito comentários constrangedores sobre seu objeto de estudo:

Certa manhã em que tive a honra de tomar o café da manhã em Farsonstown, há alguns anos, com Lord e Lady Rosse, sem nenhum outro convidado presente, Lord Rosse disse à sua senhora: “Sir William Hamilton quer nos persuadir de que três vezes quatro e quatro vezes três não são iguais.” “Não, Lady Rosse,” eu disse, “o que eu afirmo posso provar a você em um momento.” (GRAVES, 1885, pp. 683-684, tradução nossa)



E, segundo narra, Hamilton teria pegado uma caneta do próprio bolso, colocado na direção horizontal, considerado o cabo como  $i$  e a lâmina como  $j$ , e, por fim, mostrando que

operando em  $j$  com  $i$ , girando a lâmina através de um quadrante com um movimento de aparafusamento [i. e. da esquerda para a direita], essa lâmina foi trazida para apontar para cima; enquanto, ao contrário, quando operei  $i$  com  $j$ , ou usei a lâmina como eixo de um processo de aparafusamento, o cabo ficou voltado para baixo, justificando assim, no sentido em que o emprego, a minha fundamental e (como pareceu a muitas pessoas) fórmula paradoxal,  $ij = -ji$ . (GRAVES, 1885, p. 684, tradução nossa)

Sobre as questões metafísicas que teriam possibilitado a Hamilton o desenvolvimento dos quatérnios, Hankins (1980, pp. 249-251) destaca as motivações do matemático em construir elementos com significados reais (no sentido de não serem meros símbolos sem significado): as quatro componentes de um quatérnio estariam, na visão de Hamilton, relacionadas a uma dimensão temporal e três espaciais. Além disso, afirma Hankins que, diferentemente de Peacock e outros contemporâneos seus que estariam firmemente apegados ao Princípio da Permanência da Forma, que consideraria permitidas na álgebra simbólica somente as operações viáveis na aritmética, Hamilton se encontrava com maior liberdade no sentido de pensar em diferentes operações. Para Hankins,

Ele não estava limitado aos números reais da aritmética, mas era livre para criar todos os tipos de feras estranhas e maravilhosas, desde que pudessem ser construídas a partir dessa intuição primitiva do tempo. Mais importante, esses números não precisavam seguir as regras da álgebra aritmética. Eles determinavam suas próprias operações. Hamilton não estava limitado pelo Princípio da Permanência da Forma. Uma das principais razões pelas quais ele, de todos os matemáticos britânicos, descobriu os quatérnios foi porque ele poderia abrir mão da lei comutativa quando seus quatérnios o exigissem. Os algebristas que se casaram com o Princípio da Permanência da Forma nunca sequer consideraram essa possibilidade. (HANKINS, 1980, p. 251, tradução nossa)

No entanto, percebemos no julgamento acima de Hankins uma certa confusão quanto a particularidades do que seria permitido, ou não, na álgebra de Peacock. Tais questões são bem esclarecidas na dissertação de Salazar (2019, p. 161-178), que mostra que, no Princípio de Permanência da Forma de Peacock, o foco está nas formas (na generalização do simbolismo), com as regras de uma álgebra podendo ser definidas de forma arbitrária (mas logicamente



consistentes). Tal abordagem de destacar e generalizar as formas contrasta com o Princípio da Permanência das Operações, de Hermann Hankel (1839-1873), cuja ênfase encontra-se nas operações, quando se redefine as mesmas estendendo os domínios dos números.

### **As biografias sobre Hamilton e o acesso aos documentos originais**

A vida de Hamilton se encontra bem retratada nas suas duas biografias principais, escritas por Graves (em três volumes: 1882, 1885 e 1889) e Hankins (1980). Estas biografias são fundamentadas nos inúmeros documentos deixados por Hamilton, como anotações em cadernos, cartas e papéis avulsos. Alguns desses documentos encontram-se guardados na seção de manuscritos do Trinity College Dublin (TCD).

O primeiro grande biógrafo de Hamilton, Robert Perceval Graves (1810-1893) foi um clérigo irlandês amigo e correspondente habitual de Hamilton; enquanto o segundo, Thomas Hankins, é um estadunidense historiador da ciência. Há também trabalhos interessantes sobre Hamilton produzidos pela historiadora holandesa Anne van Weerden, que contrapõem alguns dos pontos de vista de Hankins no que diz respeito à vida privada do matemático.

Nas duas maiores biografias de Hamilton - Graves e Hankins - há transcrições de uma grande quantidade de cartas remetidas por ou destinadas a Hamilton. No entanto, repara-se, principalmente em Graves, a ausência de alguns trechos desses documentos: nos três volumes, há a constante presença de três pontos indicando partes dos documentos que não se encontram transcritas na obra.

Buscando inicialmente entender tais trechos que estão ausentes nas duas biografias, em agosto de 2022 estivemos na seção de manuscritos do TCD, onde há muitos arquivos referentes ao Hamilton. O procedimento na seção de manuscritos do Trinity College Dublin consiste em, mediante agendamento, o pesquisador ter acesso aos arquivos disponibilizados para consulta pela biblioteca. Esses arquivos podem ser lidos no local, assim como fotografados para serem melhor analisados posteriormente.



Os arquivos acessados pertencem às coleções MSS 1492, MSS 2172-3, MSS 7243-46 e MSS 7762-76. No entanto, infelizmente nem toda parte do MSS 1492, que possui muitas correspondências científicas e anotações, estava disponível para acesso. De acordo com Hankins, essa coleção “possui aproximadamente 250 cadernos e 10 caixas de papéis soltos” (1980, p. 455). Além disso,

Os cadernos variam de pequenos livros de bolso a livros de registro muito grandes encadernados em couro. Os cadernos são em grande parte de matemática e são aproximadamente cronológicos. As entradas são geralmente datadas. Hamilton também fez alguma tentativa de colocar todas as suas pesquisas sobre um único assunto no mesmo livro, caso em que entradas de diferentes anos podem ser encontradas lado a lado. Alguns dos cadernos são livros de cartas; em alguns casos, eles contêm a única cópia existente de uma carta. (HANKINS, 1980, p. 455, tradução nossa)

A partir da descrição acima de HANKINS pudemos de antemão ter uma ideia da quantidade de arquivos preservados no TCD, além do estado de organização dessas entradas ainda por Hamilton.

Os arquivos das pastas acessadas MSS 2172-73 possuem correspondências entre Hamilton e Tait, do período de 1858 a 1863. Peter Guthrie Tait (1831-1901) foi um matemático e físico escocês, principal aluno de Hamilton e seu sucessor na pesquisa sobre os quatérnios, que publicou algumas obras que ajudaram no ensino e na divulgação desses novos números; entre elas, o livro *An Elementary Treatise on Quaternions* (1867). Nas cartas consultadas, os dois matemáticos discutem amplamente os quatérnios e suas aplicações.

No entanto, a maior parte dos documentos acessados, dos MSS 7243-46 e MSS 7762-76, são cartas que estavam anteriormente com a família O'Regan. A filha mais nova de Hamilton, Helen Eliza, casou-se com o arqui-diácono John O'Regan, e foi aparentemente a única dos três filhos de Hamilton que teve descendentes (WAYMAN, 1966, p. 174). Era com esse ramo da família que se encontravam os documentos dessas coleções. Como já foi dito, muitas dessas cartas não estão transcritas e, em alguns casos, nem mesmo são citadas nas duas grandes biografias. O assunto dessas cartas é variado, sendo algumas de cunho pessoal e outras relativas à vida profissional do matemático.

## **Resultados preliminares nas buscas**





Tendo iniciado minhas consultas aos arquivos, minha maior surpresa foi encontrar, entre eles, cartas que não são mencionadas em nenhuma das biografias. Em meio às diversas correspondências não citadas em trabalhos anteriores, estão algumas entre Hamilton e pessoas de sua confiança, como, por exemplo, seu biógrafo Robert Graves, John Graves (irmão de Robert) e Humphrey Lloyd, professor (e, mais tarde, reitor) do TCD; com quem compartilhava suas reflexões científicas e filosóficas.

No segundo volume da biografia escrita por ele, Robert Graves conta que, no verão de 1841, havia sido procurado por Hamilton para escrever um resumo biográfico do mesmo para uma série sobre irlandeses notáveis que seria publicada na *Dublin University Magazine* (Graves, 1885, p. 344). Essa revista foi veiculada de 1833 a 1882 e divulgava assuntos relacionados tanto à política quanto à literatura. E, de fato, a biografia de Hamilton veio a público no número de janeiro de 1842 da *Magazine*. Vale ressaltar o quanto nos pareceu inusitado um matemático ainda em vida, e de apenas trinta e seis anos, ter recebido esse convite. Hamilton até então ainda não havia desenvolvido sua mais notável teoria, a dos quatérnios e, no entanto, percebemos o quanto seu nome já era destacado na sociedade; o que contrasta com o que o percebemos na literatura existente sobre a vida de outros matemáticos como, por exemplo, o já citado Graßmann, que teve um reconhecimento mais tardio de suas teorias.

Durante o período de preparação do texto para a *Magazine*, Hamilton e Graves se comunicaram extensamente, muitas vezes através de cartas. Algumas dessas encontram-se transcritas (parcialmente) em Graves (1885, pp. 344-347), mas encontramos uma carta nos arquivos do TCD, de 21 de julho de 1841, não transcrita na obra (OR 816)<sup>5</sup>.

Além disso, entre essas correspondências encontradas também estão uma carta de Gabriel Piola (1794-1850) para Hamilton, de 8 de dezembro de 1839, sobre

---

<sup>5</sup> Esses arquivos fazem parte da seção de manuscritos da Trinity College Library e optamos por referenciá-los com as letras OR seguidas de seu número de acordo com o catálogo da biblioteca, assim como fez Hankins na biografia de Hamilton.



resolução de equações de grau maior do que 4 (OR 725). Essa carta apresenta-se apenas parcialmente transcrita em Graves (1885, p. 309).

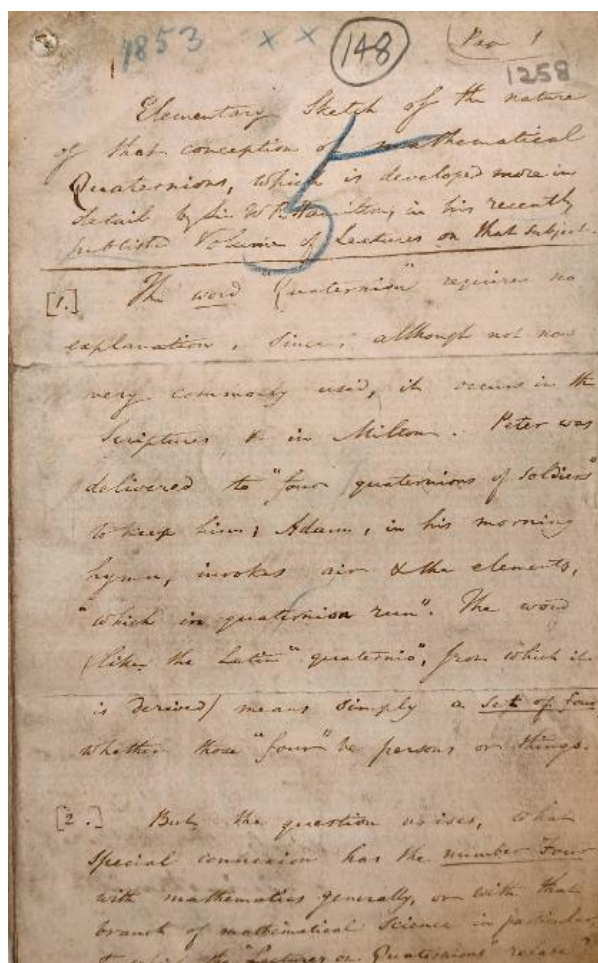
Em outra carta ausente nas biografias, de Arthur Cayley (1821-1895) para Hamilton, de 23 de setembro de 1853, Cayley descreve que esteve ocupado com teoremas de Hamilton sobre polígonos inscritos em superfícies de segunda ordem. Ademais, narra que obteve por acaso um sistema similar às unidades  $i$ ,  $j$ ,  $k$  de Hamilton (OR 1239).

Ainda, nas observações sobre o capítulo 17 de sua biografia, Hankins reflete que não entende o porquê de Hamilton não ter se interessado pelos trabalhos de George Boole (1815-1864) conectando a álgebra e a lógica, apesar de Hamilton ter tomado conhecimento dos mesmos. De fato, Graves transcreve diversas cartas de outro matemático e lógico, Augustus De Morgan (1806-1871), para Hamilton, em que De Morgan cita as pesquisas de Boole. Descobrimos nos arquivos duas correspondências de Boole para Hamilton, brevemente comentadas em Hankins (1980, p. 433) e ausentes nos três volumes de Graves (OR 1297 e OR 1298). Na primeira das cartas, Boole pede que Hamilton lhe redija uma carta de recomendação<sup>6</sup>, escrevendo sobre suas realizações matemáticas. Essa é mais uma demonstração do prestígio de Hamilton. Pelo modo como De Morgan fala sobre Boole nas correspondências a Hamilton, De Morgan estava mais familiarizado com o trabalho de Boole; no entanto, é a Hamilton que Boole pede um testemunho de suas habilidades, o que mais uma vez mostra a respeitabilidade dedicada a Hamilton pelos seus pares.

Figura 1: Esboço da natureza da concepção dos quatérnios matemáticos, por Hamilton

---

<sup>6</sup> Boole havia se candidatado para a posição de *Mathematics Examiner* no *India Office*.



Fonte: TCD, OR 1258

A imagem anterior constitui a primeira página de um dos manuscritos da coleção da família O'Regan, de 1853, em que Hamilton escreve um pequeno resumo sobre, em suas palavras, "a natureza da concepção dos quatérnios matemáticos". Repare que nela há rabiscos em azul, que foram feitos por Robert Graves quando consultava o material para elaboração da biografia em três volumes. Esse texto encontra-se, praticamente completo, no terceiro volume de Graves, pp. 635-637. Porém, enquanto Hamilton enumera nos cantos superiores os números das páginas, de 1 a 10 (são cinco folhas, frente e verso); Graves curiosamente as enumera, em giz azul, de 5 a 14.

## CONCLUSÃO



O surgimento de novas álgebras, com propriedades diferentes daquelas encontradas no conjunto dos reais ou dos complexos, como foi o caso dos quatérnios, constitui um marco importante para o desenvolvimento da matemática no século XIX.

Nossa pesquisa sobre o contexto e as motivações que tornaram possíveis o desenvolvimento de produtos não comutativos ainda está em andamento. Para progressos futuros esperamos, no que diz respeito ao Hamilton, analisar mais manuscritos (já escaneados para nosso uso) do TCD; e realizar mais conexões entre o que encontramos e o que já está documentado na bibliografia deste.

Além do exposto, intencionamos estudar com profundidade o matemático alemão Graßmann e seus escritos. Por fim, planejamos ainda analisar os desdobramentos das pesquisas de Hamilton e de Graßmann, assim como de seus sucessores (os matemáticos que receberam e deram continuidade a seus trabalhos), durante o século XIX.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecemos imensamente a toda equipe do Trinity College Dublin, The University of Dublin, pela disponibilidade e o grande auxílio prestado durante nossas pesquisas nas coleções de manuscritos sobre Hamilton.

## **REFERÊNCIAS**

### **Fontes**

DUBLIN. ARQUIVOS DA SEÇÃO DE MANUSCRITOS DO TRINITY COLLEGE DUBLIN, THE UNIVERSITY OF DUBLIN. MSS 7762-76, "Papers of Sir William Rowan Hamilton and of his son-in-law Archdeacon O'Regan listed and indexed at Trinity College Library, Dublin, Oct. 1970 - April 1971."  
OR 725, OR 816, OR 1239, OR 1258, OR 1297, OR 1298.

### **Publicações**

ARNAULD, A. **Nouveaux éléments de géométrie**. Paris: Savreux, 1667.



- CROWE, M. J. **A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system**. New York: Courier Corporation, 1994.
- GRASSMANN, H. Sur les différents genres de multiplication. **Journal für die reine und angewandte Mathematik** (Crelles Journal), 1855, v. 49, pp. 123-141.
- GRAVES, R. P. **Life of Sir William Rowan Hamilton: Knt., LL. D., DCL, MRIA, Andrews Professor of Astronomy in the University of Dublin, and Royal Astronomer of Ireland, Etc. Etc.: Including Selections from His Poems, Correspondence, and Miscellaneous Writings**, v. 1. Dublin: Hodges, Figgis, & Company; London: Longmans, Green, & Company, 1882.
- GRAVES, R. P. **Life of Sir William Rowan Hamilton: Knt., LL. D., DCL, MRIA, Andrews Professor of Astronomy in the University of Dublin, and Royal Astronomer of Ireland, Etc. Etc.: Including Selections from His Poems, Correspondence, and Miscellaneous Writings**, v. 2. Dublin: Hodges, Figgis, & Company; London: Longmans, Green, & Company, 1885.
- GRAVES, R. P. **Life of Sir William Rowan Hamilton: Knt., LL. D., DCL, MRIA, Andrews Professor of Astronomy in the University of Dublin, and Royal Astronomer of Ireland, Etc. Etc.: Including Selections from His Poems, Correspondence, and Miscellaneous Writings**, v. 3. Dublin: Hodges, Figgis, & Company; London: Longmans, Green, & Company, 1889.
- HANKINS, T. L. Triplets and triads: Sir William Rowan Hamilton on the metaphysics of mathematics. **Isis**, v. 68, n. 2, p. 175-193, 1977.
- HANKINS, T. L. **Sir William Rowan Hamilton**. Johns Hopkins University Press. Baltimore, Maryland, 1980.
- HANKINS, T. L. Hamilton, William Rowan. In: Gillispie, C. C. (org.). **Complete Dictionary of Scientific Biography**. Encyclopedia.com, atualizado em 2018. Disponível em <<https://www.encyclopedia.com/people/history/historians-miscellaneous-biographies/william-rowan-hamilton#2830901841>>. Acesso em: 30 de jan. de 2023.
- SALAZAR, M. S. **Rupturas no estatuto dos números negativos - o caso da Inglaterra**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: <[https://pemat.im.ufri.br/images/Documentos/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2019/MSc\\_97\\_Michel\\_Santos\\_Salazar.pdf](https://pemat.im.ufri.br/images/Documentos/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2019/MSc_97_Michel_Santos_Salazar.pdf)>. Acesso em: 10 de dez. de 2022.
- SCHUBRING, G. **Análise Histórica de Livros de Matemática: Notas de Aulas**. Campinas: Autores Associados, 2003.
- SCHUBRING, G. O Que é e ao Que Serve a Hermenêutica?. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 194-200, 2018. Disponível em: <<https://jjeem.pgsskroton.com.br/article/view/7045>>. Acesso em: 06 de fev. de 2023.



**XV SNHM**  
Seminário Nacional de História da Matemática  
Abril de 2023  
Maceió - AL



THE DUBLIN UNIVERSITY MAGAZINE. **Sir William Rowan Hamilton**. Our Portrait Gallery - n. XXVI, v. 19, n. 109. Dublin: William Curry, Jun. and Company, 1842, pp. 94-110. Disponível em:

<<https://archive.org/details/dublinuniversit12unkngoog/mode/1up?view=theater>>.

Acesso em: 06 de nov. de 2022.

VAN WEERDEN, A. **A Victorian Marriage: Sir William Rowan Hamilton**. Stedum: J. Fransje van Weerden, 2017.

WAYMAN, P. A. Descendants of Sir William Rowan Hamilton. **Irish Astronomical Journal**, v. 7, p. 173, 1966.