INDÍCIOS HISTÓRICOS DO CONCEITO DE VARIÁVEL NA MATEMÁTICA GREGA

Luciana Bertholdi Machado[1]

Iran Abreu Mendes[2]

RESUMO

Assumindo o conceito de variável como gerador do Cálculo Diferencial e Integral, este trabalho visa apresentar alguns indícios históricos do conceito de variável na matemática grega. Trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa, adotando a pesquisa bibliográfica como procedimento metodológico. Para esta investigação, tem-se como referencial teórico Boyer (1959), Kline (1992), Baron e Bos (1985), Caraça (1998) e Katz (2010), os quais possibilitaram responder a seguinte questão: em que a matemática grega contribuiu com o desenvolvimento conceitual de variável? Durante o estudo foi possível constatar que o problema da incomensurabilidade, o método da exaustão de Eudoxo, a não aceitação de grandezas infinitamente pequenas, entre outros fatores, deram origem a diversas inquietações matemáticas, entre as quais: o discreto e o contínuo, o finito e o infinito, o repouso e o movimento, cenário que motivou o problema da variabilidade, que por sua vez proporcionou essencialmente a construção do Cálculo Diferencial e Integral.

Palavras-chave: Conceito de Variável. Matemática Grega. Cálculo Diferencial e Integral.

1 INTRODUÇÃO

Algumas concepções limitadas da matemática grega não permitiram que houvessem avanços de modo a torná-los os inventores do Cálculo. No entanto, foram importantes nesse processo, pois, na “tentativa de expressar suas ideias intuitivas sobre as razões ou proporcionalidades de linhas, que reconheciam vagamente como contínuas, em termos de números, que consideravam discretos” (BOYER, 1959, p. 4, tradução nossa), deram origem as ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral.

1 Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – REAMEC. Docente Assistente da Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT). E-mail: lucianabm@unemat.br

2 Docente Adjunto da Universidade Federal do Pará (UFPA). E-mail: iamendes1@gmail.com

Assumindo a postura teórica do conceito de variável (variabilidade) como gerador do Cálculo Diferencial e Integral, pergunta-se: em que a matemática grega contribuiu com o desenvolvimento conceitual de variável? Nesse sentido, busca-se apresentar alguns indícios históricos do conceito de variável na matemática grega.

Por meio deste estudo, percebeu-se que algumas situações como o problema da incomensurabilidade, a teoria das proporções, o método da exaustão, negação à ideia de movimento e contínuo, “teoria” dos infinitesimais, a quadratura da parábola, entre outros, desencadearam uma série de inquietações das quais produziram as ideias do Cálculo.

A partir dessas e outras situações, e da aceitação do infinito e de processos dinâmicos (movimento), que as primeiras noções de variável no sentido de variabilidade surgem, paralelamente ao desenvolvimento conceitual de função, conceitos essenciais ao desenvolvimento do Cálculo.

Pretende-se, aqui, trazer uma discussão maior em torno do problema da incomensurabilidade, da teoria das proporções e do método de exaustão como indícios históricos da matemática grega que contribuíram com o problema da variabilidade e, consequentemente com o conceito de variável, que deram origem aos problemas construtores do Cálculo.

Para tanto, esta pesquisa possui abordagem qualitativa, de procedimento bibliográfico, e encontra-se estruturada da seguinte forma: inicialmente trata da problemática do conceito de variável enquanto gerador do Cálculo, após a metodologia, tem-se alguns indícios do conceito de variável na matemática grega e, posteriormente, traz alguns reflexos nas matemáticas pós-gregos. Culminamos com algumas reflexões finais e as referências utilizadas.

2 O CONCEITO DE VARIÁVEL COMO GERADOR DO CÁLCULO

Historicamente, o conceito de variável está estreitamente relacionado com o desenvolvimento conceitual de função e a necessidade de representar *quantidades variáveis*. Em grande parte das funções tratadas no Cálculo, a variável irá descrever uma *taxa de mudança* entre as quantidades relacionadas, de forma que a variação de uma quantidade implica na variação da outra quantidade, dando a ideia de *movimento* (transformação).

Os conceitos de limite, derivada e integral de uma função constituem-se como centrais no Cálculo, e costumam ser abordados nesta ordem nos cursos de Ensino Superior. Historicamente a formalização conceitual de limite ocorreu apenas no final do século XIX, quando se trabalhavam os processos de derivação e integração, estabelecidos no século XVII. No entanto, por meio da sistematização do limite, tanto o Cálculo Diferencial quanto o Cálculo Integral passaram a ser caracterizados em termos deste conceito.

Agora, em que se constitui a ideia de limite? Limite é um número e, do ponto de vista da história, surge por meio da construção lógica dos números reais e da continuidade da reta real, os quais se tornam a estrutura básica de todo o Cálculo e, nesse contexto, está o ato de *medir*. Segundo Caraça (1998, p. 30) há "no problema da medida, três fases e três aspectos distintos - escolha da unidade; comparação com a unidade; expressão do resultado dessa comparação por um número", e do ato de medir, usando comparação entre grandezas de mesma natureza, surgem os chamados números racionais e irracionais, os quais constituem o campo dos números reais e surgem, também, por intermédio da *passagem ao limite*, ideia essencialmente dinâmica de *continuidade* e que evoca o *infinito*/*infinitésimo*.

Em Caraça (1998, p. 207) a definição de infinitésimo é posta da seguinte forma:

> Dá-se o nome de infinitésimo a toda a variável representativa de um conjunto de pontos pertencentes à vizinhança da origem quando nessa variável considerarmos sucessivamente valores $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$ tais que $|x_n| < \delta$ para todos os valores de $n > n_1$ e todo o $\delta > 0$.

Pela definição, o infinitésimo possui um caráter de variável e não de número. Assim, sendo x um infinitésimo definido por uma sucessão numérica, este tende a zero para valores na sua *vizinhança*, tão próximos de x quanto se queira. E por vizinhança Caraça (1998, p. 207) enfatiza que "uma vizinhança não é um segmento, mas sim uma variável cujo domínio é constituído por uma infinidade de segmentos onde há sempre segmentos de amplitude inferior a qualquer número positivo", ou seja, sendo x um infinitésimo existe em sua vizinhança (variável) uma infinidade de pontos que distam de x sempre uma quantidade inferior ao número positivo δ (a partir do qual a vizinhança se forma).

Dessa forma, para cada ponto da reta real existem infinitas vizinhanças (intervalos) contendo uma infinidade de pontos no seu interior, implicando na continuidade da reta, resultado de “variação por gradações insensíveis” (CARAÇA, 1998, p. 55), o que sugere pequenos movimentos contínuos. Esse cenário de continuidade da reta oferece condições de analisar o comportamento das curvas no contorno (vizinhança) de um determinado ponto, apoiado em propriedades de limite, ou seja, pode-se compreender o comportamento (regularidade) de funções considerando pequenas variações no contorno de um ponto da reta real.

Diante desse contexto, a continuidade de uma curva obtida pela variação (movimento) das quantidades relacionadas segundo uma lei (função), deve-se ao comportamento que essa curva assume mediante variações contínuas das variáveis interdependentes. Diante disso, e do que foi exposto anteriormente, percebe-se que o problema da variabilidade, quer seja pela variação instantânea (medida instantânea) que dá origem à derivada ou pela variação de comprimentos, áreas e volumes em figuras curvilíneas (medidas geométricas) que promove a integração, é o que motivou essencialmente a construção do Cálculo Diferencial e Integral.

3 APORTES METODOLÓGICOS

Esta pesquisa configura-se como abordagem qualitativa. Segundo Minayo (2002, p. 22) a pesquisa qualitativa

> [...] trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis

e que segundo D’Ambrosio (2004, p. 12) “tem como foco entender e interpretar dados e discursos”, que neste caso refere-se a utilização da História da Matemática para interpretar ideias matemáticas gregas.

Quanto ao procedimento, caracteriza-se como pesquisa bibliográfica, fundamentada teoricamente nos trabalhos de Boyer (1959), Kline (1992), Baron e Bos (1985), Caraça (1998) e Katz (2010), os quais tratam de conceitos matemáticos na perspectiva da História da Matemática. Conforme Gil (2002, p. 45) esta pesquisa torna-se "particularmente importante quando o problema de pesquisa requer dados muito dispersos pelo espaço. [...] Em muitas situações, não há outra maneira de conhecer os fatos passados se não com base em dados bibliográficos", a partir de literaturas existentes, como no caso da presente pesquisa.

Nesse sentido, adota-se um cenário de análise histórica a fim de apresentar uma visão embrionária do conceito de variável presente na matemática grega, a partir do qual motivou, também, o desenvolvimento do Cálculo.

4 INDÍCIOS DO CONCEITO DE VARIÁVEL NA MATEMÁTICA GREGA

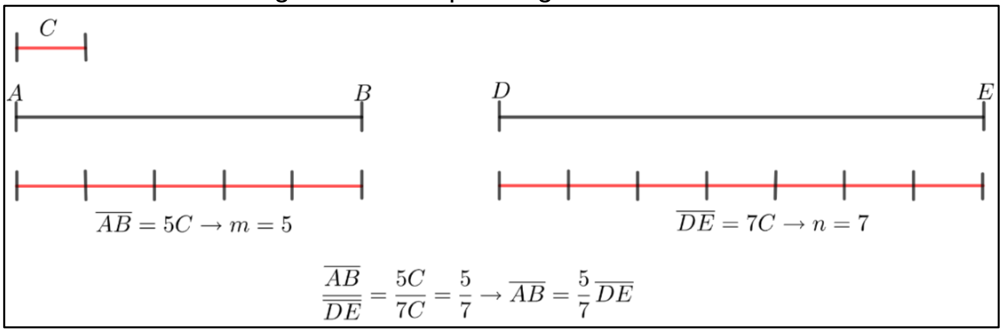
Não é novidade que a matemática grega contribuiu com o desenvolvimento da matemática, inclusive com o desenvolvimento do Cálculo. Um exemplo disso, é o problema da incomensurabilidade, o qual só pôde ser elucidado posteriormente com estudos envolvendo "problemas do infinito e do movimento", conceitos importantes para constituição da "estrutura da reta" (CARAÇA, 1998, p. 77).

Os pitagóricos acreditavam que todas as coisas poderiam ser explicadas por meio de grandezas inteiras (elementos finitos e inteiros) ou em termos de suas propriedades e razões, e sendo essas grandezas de mesma natureza então eram comensuráveis. Além disso, a razão (não possui o sentido de fração) entre suas medidas (inteiras) poderia ser expressa por meio de um "racional" (nomenclatura moderna), em que essas grandezas eram comparáveis (BARON, BOS, 1985; KATZ, 2010; KLINE, 1992).

Assim, para realizar a comparação entre duas grandezas A e B, buscava-se uma terceira grandeza (menor) C como medida comum entre A e B, de forma que cada uma das grandezas A e B fosse representada por uma quantidade inteira de vezes em relação a medida C. Por exemplo, seja C a medida comum entre dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ e sejam m e n quantidades inteiras. Dizer que $\overline{AB} = mC$ e

$\overline{DE} = nC$, significa que a medida C "cabe" m vezes em $\overline{AB}$ e "cabe" n vezes em $\overline{DE}$ e, além disso, $\overline{AB}:\overline{DE} = m:n$ (razão comensurável), ou seja, $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são grandezas comensuráveis, conforme exemplificado na figura 1.

Figura 1: Exemplo de grandeza comensurável

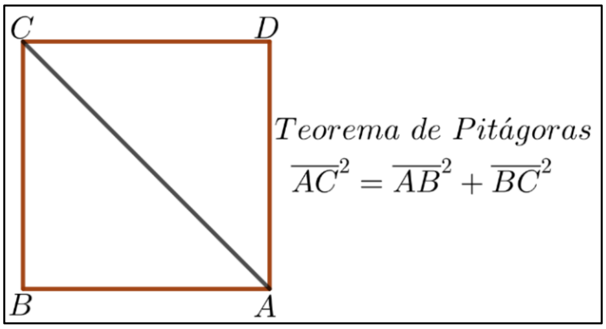


Fonte: Elaborado pelos autores

No entanto, essa teoria pitagórica entra em crise quando percebe-se que nem todas as coisas poderiam ser reduzidas à grandezas inteiras e suas razões (KLINE, 1992), ou seja, trata-se da existência de grandezas incomensuráveis (não existência de medida comum). O retrato dessa incomensurabilidade surge, a princípio, do fato de que a diagonal e o lado de um quadrado são medidas incomensuráveis, ou seja, sendo D e L as medidas da diagonal e do lado do quadrado, respectivamente, não existem duas quantidades inteiras positivas m e n como múltiplas de uma unidade comum C, resultando que $D: L \neq m: n$.

A demonstração dada por Aristóteles (384-322 a.C.) trata-se de um caso de redução ao absurdo, isto é, supõe-se a princípio que a comensurabilidade esteja satisfeita e deve-se chegar a uma contradição, que, neste caso, equivale afirmar que a mesma medida pode ser par e ímpar (BARON, BOS, 1985; CARAÇA, 1998; KATZ, 2010; KLINE, 1992). Uma possível demonstração pode ser feita considerando a situação ilustrada na figura 2.

Figura 2: Diagonal do quadrado ABCD.



Fonte: Elaborado pelos autores

Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, do teorema de Pitágoras resulta que $\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2$, logo $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 = 2$. Suponha que as medidas $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ sejam comensuráveis, ou seja, existem medidas inteiras m e n tais que $\overline{AC} : \overline{AB} = m : n$, sendo $m : n$ irredutível. Da igualdade anterior, segue que $m^2 : n^2 = 2$, ou seja, $m^2 = 2n^2$. Como m^2 é par, então m é par, e neste caso, n deve ser ímpar, dada a irredutibilidade de $m : n$. Por outro lado, sendo m par, então $m = 2k$ (k metade de m). Resulta disso que $4k^2 = 2n^2$, ou seja, $n^2 = 2k^2$. Logo, se n^2 é par então n é par. Portanto, n é impar e par simultaneamente. Desta forma, $\overline{AC} : \overline{AB} \neq m : n$, o que implica a não comensurabilidade das medidas (BARON, BOS, 1985; CARAÇA, 1998; KLINE, 1992), e sugere a insuficiência dos números inteiros para representar tais medidas. O primeiro caso dessa incomensurabilidade teria surgido a partir de um quadrado de lado unitário, resultando na diagonal com medida $\sqrt{2}$.

Foi Eudoxo (408-355 a.C.), com a *teoria das proporções*, o responsável por lidar, até em então, com a questão da incomensurabilidade, que de alguma forma "danificou" a teoria estática da matemática grega por meio da "rivalidade" entre o discreto (números inteiros) e o contínuo (ângulo, comprimento, área, volume, etc.).

Segundo Kline (1992) a ideia de grandezas (magnitudes) contínuas era a de entidades (quantidades) "que podiam variar, por assim dizer, de maneira contínua. As magnitudes se opunham a números que saltavam de um valor para outro, como quatro a cinco, enquanto as magnitudes não recebiam nenhum valor quantitativo" (p.79, tradução nossa), e com isso resolveriam o problema da incomensurabilidade, fundamentada pela geometria.

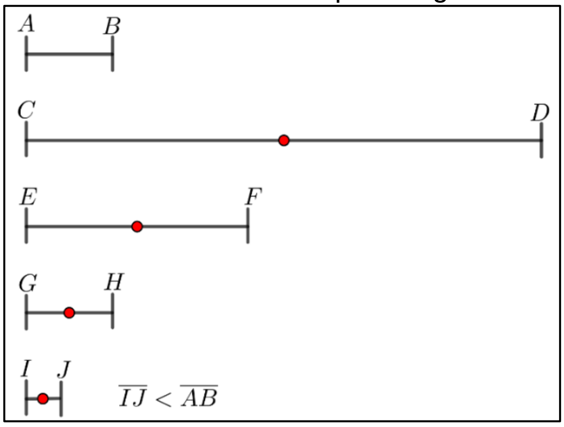
E foi evitando atribuir valores numéricos às grandezas (em quantidade finita) que Eudoxo desenvolveu relações (igualdade) de proporção entre grandezas de mesma natureza (razões comensuráveis e incomensuráveis), sem expressar numericamente essa relação. Assim, usando uma linguagem moderna, dizer que $a : b = c : d$ significa que existem inteiros quaisquer m e n tais que umas das condições poderia ser verificada: (1) $ma < nb$ implica $mc < nd$; (2) $ma > nb$ implica $mc > nd$; (3) $ma = nb$ implica $mc = nd$, ideia que viria a ser utilizada para a construção dos números reais por Dedekind (1831-1916) com seu método de *corte*.

Outro resultado desenvolvido por Eudoxo é o que viria a ser denominado de *método da exaustão* (método de Eudoxo), que juntamente com a teoria das proporções seria fonte de inspiração para outras construções matemáticas, inclusive para o desenvolvimento do Cálculo (século XVII). Conforme Baron e Bos (1985, p. 28) este método segue enunciado (conforme *os Elementos* de Euclides) da seguinte forma:

> Considerando duas grandezas distintas, se subtrairmos da maior uma outra maior do que sua metade, e desta uma outra maior do que sua metade e assim por diante, obteremos finalmente alguma grandeza que será menor do que a menor grandeza considerada (Euclides, X, 1).

Geometricamente, pode-se visualizar esse princípio conforme figura 3, esse procedimento não se aplica apenas a segmentos de reta, mas também nas razões entre áreas e volumes de figuras curvilíneas.

Figura 3: Método da exaustão para segmento de reta



Fonte: Elaborado pelos autores

No entanto, independente da grandeza considerada, os gregos a utilizavam como reduções (divisões) contínuas finitas. Conforme Baron e Bos (1985, p. 25) "toda a teoria de número dos gregos é incorporada na estrutura geométrica e todos os conceitos impossíveis de serem expressos nesses termos são logo eliminados, mas nunca se invoca o infinito".

Ainda nesse cenário, segundo Arquimedes (287-212 a.C) (apud Baron e Bos, 1985, p. 25) "se adicionarmos continuamente a uma quantidade finita, excederemos qualquer grandeza dada e, do mesmo modo, se subtrairmos continuamente dela chegaremos a alguma coisa menor do que ela". Embora os gregos não admitissem grandezas infinitamente pequenas ou infinitamente grandes, surge nesse contexto umas das primeiras ideias de limite e de continuidade (KLINE, 1992), fundamentais para o desenvolvimento do Cálculo. Segundo Boyer (1959, p. 29, tradução nossa) "a matemática grega não incluía nenhum conceito geral de número e, consequentemente, nenhuma noção de uma variável contínua algébrica sobre a qual tais teorias poderiam logicamente ter sido baseadas".

Assim, apesar da ideia embrionária do conceito de variável na matemática grega, é pela aceitação do infinito e de processos dinâmicos (movimento), no contexto da continuidade, que as primeiras noções de variável no sentido de variabilidade surgem e, consequentemente, a *função*.

5 INTERPRETAÇÕES E REFLEXOS NAS MATEMÁTICAS PÓS-GREGOS

O problema da incomensurabilidade, que contribuiu tanto com o surgimento da teoria das proporções e o método da exaustão de Eudoxo quanto para diversas outras construções matemáticas, não foi o único fato da matemática grega a favorecer o desenvolvimento do Cálculo. Outros matemáticos gregos como Zeno (século V a.C) e seus *paradoxos* que indicam negação à ideia de movimento e contínuo, Demócrito (460-370 a.C) com sua *teoria dos infinitesimais*, Arquimedes (287-212 a.C) e a *quadratura da parábola*, entre outros, também produziram as ideias iniciais do Cálculo.

A "rivalidade" entre o discreto e o contínuo, o finito e o infinito, o repouso e o movimento, a separação entre número e geometria e a axiomatização da matemática grega no livro *Os Elementos* de Euclides, impactou não só a matemática grega mas a matemática pós-grega em diferentes povos (KATZ, 2010; KLINE, 1992,), e novos conceitos foram incorporados. Segundo Kline (1992) a civilização hindu (Índia) teria sido a primeira a receber influência da matemática grega, que juntamente com a civilização árabe, contribuíram significativamente para o desenvolvimento da Álgebra, com ênfase na resolução de equações, contexto em que a ideia de variável aparece relacionada com a determinação de um número desconhecido.

A ideia de variável associada a movimento, na Europa medieval, está fortemente relacionada a trabalhos de Nicole Oresme (1320-1382), influenciado por obras gregas, com o que ele denomina de "variáveis em intensidade" (BARON; BOS, 1985, p. 59), onde "os conceitos de movimento foram efetivamente relacionados em bases intuitivas com a ordenada, a abscissa, o gradiente de curva (ou reta) e o espaço que os contém" (*ibid*., p. 60), em que abscissa e ordenada, usando nomenclatura moderna, eram denominadas *longitude* e *latitude*, respectivamente, aplicadas às leis físicas e associadas com figuras geométricas a fim de representar *taxa de mudança*, de forma que "a área total representava a variação em questão; não houve referência a valores numéricos" (KLINE, 1992, p. 284, tradução nossa), e por essa representação teria contribuído também com o desenvolvimento do conceito de função.

Com o desenvolvimento do simbolismo, essas representações geométricas ganham um tratamento também algébrico, com contribuições principalmente de Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665), século XVII, e o estudo da relação entre equações e curvas e da interdependência entre as variáveis nessa relação. Com Fermat e seus estudos sobre lugares geométricos, tem-se a motivação para o estudo de variação infinitesimal (quantidade infinitesimal), definido no século XIX em termos de limite. Posteriormente, ainda no século XVII, essas e outras ideias matemáticas foram utilizadas por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) para a "invenção" do Cálculo Diferencial e Integral, cenário em que a variável possui sentido dinâmico (movimento).

6 REFLEXÕES FINAIS

Obviamente não se espera esgotar neste artigo todas as ideias matemáticas que contribuíram como o desenvolvimento conceitual de variável, tão pouco com desdobramento do Cálculo. Contudo, espera-se oferecer ao leitor alguns indícios históricos do conceito de variável presentes na matemática grega, que acabaram por influenciar o desdobramento do Cálculo. Para tanto, desenvolveu-se uma pesquisa de abordagem qualitativa, de procedimento bibliográfico, por meio de análise histórica.

Situações como o problema da incomensurabilidade, a teoria das proporções, o método da exaustão, negação à ideia de movimento e contínuo, “teoria” dos infinitesimais, a quadratura da parábola, entre outros, desencadearam uma série de inquietações das quais produziram as ideias do Cálculo.

O problema da incomensurabilidade gerou polêmica na matemática grega, visto que até então tudo poderia ser representado por quantidades inteiras. A existência de uma grandeza não inteira, que deu origem aos números irracionais, contribuiu com o problema entre o discreto (números inteiros) e o contínuo (ângulo, comprimento, área, volume, etc.), resolvido, em partes, pela teoria das proporções de Eudoxo, em que evitou atribuir valores numéricos às grandezas.

Por outro lado, o método da exaustão de Eudoxo traz as ideias iniciais de limite, pois trata de reduções (divisões) contínuas de grandezas, mas que não invoca o infinito, e dessa forma contribuiu com o problema do finito e o infinito. Este método é tratado posteriormente por Arquimedes e posto na obra *Os Elementos* de Euclides, contribuindo, posteriormente, para a concepção de infinitesimal.

Além disso, os gregos se eximiram de trabalhar como o problema da variabilidade, o qual deu origem ao estudo de movimentos (leis físicas), modelados segundo uma relação entre quantidades variáveis, a partir de representações geométricas, ou seja, percebe-se nesse contexto o problema entre o repouso e o movimento.

Em linhas gerais, o desconforto grego mediante as ideias de discreto e contínuo, do finito e do infinito, do repouso e do movimento, além da ideia de infinitesimal, motivou o problema da variabilidade, que por sua vez proporcionou essencialmente a construção do Cálculo Diferencial e Integral, seja pela variação instantânea (medida instantânea), que da origem à derivada, ou pela variação de grandezas (comprimentos, áreas, volumes, etc.) que resulta na integração.

7 REFERÊNCIAS

BARON, M. E. BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. v.1.

BOYER, C. B. **The History of Calculus and its Conceptual Development**. New York, Dover, 1959.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. de L. **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2002.

KATZ, V. J. **História da Matemática**. Tradução de Ana Sampaio e Filipe Duarte. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

KLINE, M. **El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días, I**. Madrid: Alianza Editorial, 1992.

MINAYO, M. C. S. (org.). **Pesquisa Social:** teoria, método e criatividade. 21. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.