As permutações caóticas respondem: qual a probabilidade do sorteio do amigo oculto dar certo?

Emerson Gordiano de Almeida[1]

Regivaldo da Silva Santos[2]

RESUMO

O problema aqui proposto sobre o sorteio da brincadeira do amigo oculto é na verdade a roupagem moderna para um problema desafiador do século XVIII: o problema das cartas mal endereçadas cuja resolução envolveu matemáticos prolíficos como Euler e Bernoulli. Neste trabalho, trazemos uma breve biografia destes matemáticos e na sequência, em linguagem moderna, elucidamos a estratégia de resolução de Euler por meio de ferramentas da análise combinatória, o resultado final sobre a probabilidade de se obter sucesso no sorteio do amigo oculto exibe uma peculiar relação com o irracional "*e*" e surge a partir da aplicação do número encontrado por Euler na definição de probabilidade de Laplace a partir do tratamento dado por meio de instrumentos do Cálculo o que nos faz observar como problemas do passado podem conectar-se com curiosidades atuais e motivar descobertas e resultados na Matemática.

Palavras-chave: História da Matemática. Permutações Caóticas. Euler. Bernoulli

1. INTRODUÇÃO

A troca de presentes já é uma tradição no Natal. Para tornar esse momento ainda mais divertido, algumas famílias e grupos de amigos realizam um sorteio no qual cada participante tira o nome de outro a quem irá presentear, é o famoso amigo oculto. Claro que a brincadeira só dá certo se cada participante retirar um nome que não o seu próprio, então pergunta-se: qual a probabilidade do amigo oculto dar certo, isto é, cada participante sortear o nome de um outro participante?

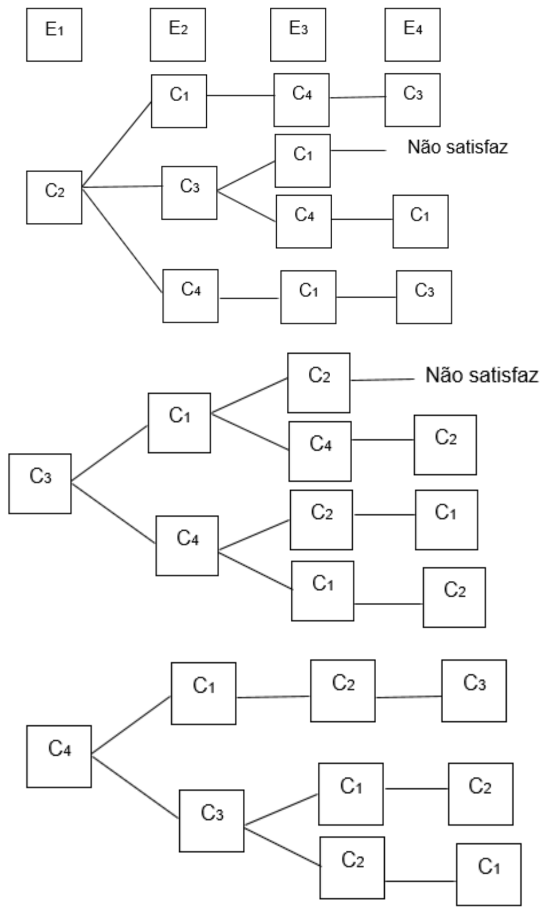
No século XVIII o grandioso matemático Euler (1707 – 1783) debruçou-se sobre o seguinte enigma proposto por Nicolaus Bernouli (1687 – 1759): como um carteiro pode endereçar n cartas em n envelopes de modo que todos os destinatários estejam incorretos?

1 emersongordiano@gmail.com

2 santos.r.s@outlook.com

A resolução deste que ficou conhecido como o problema das cartas mal endereçadas, consiste em reordenar as n cartas em n posições distintas da original. O diagrama a seguir demonstra de maneira simples como Euler atacou o problema, inicialmente a partir de um estudo de casos particulares (caso $n = 4$).

Figura 1: Ilustração: problema das cartas mal endereçadas



Fonte: os autores (2022)

Podemos nos referir a estas permutações onde nenhum elemento está em sua posição original na ordem previamente estabelecida como desarranjo ou permutação caótica, vamos denotar o número de possibilidades de desarranjos para n envelopes por D_n, facilmente vemos que $D_1 = 0$, já que não há mais que uma maneira de ordenar um único elemento, não há como desarranjar. Para o caso $n = 2$, temos uma única possibilidade para desarranjá-los (um ocupa a posição do outro), assim $\boldsymbol{D_2 = 1}$. Percebemos que $\boldsymbol{D_3 = 2}$: $\boldsymbol{C_2C_3C_1 \ \ ou \ C_3C_2C_1}$. No diagrama acima podemos ver que $\boldsymbol{D_4 = 9}$, continuar com a enumeração não é prático, o que nos motiva a buscar um raciocínio para o caso geral.

Nesse sentido, Euler procedeu de uma forma bastante engenhosa e interessante para encontrar a solução do problema das cartas mal endereçadas o que equivalentemente seria a fórmula para calcular a quantidade de desarranjos para um número $\boldsymbol{n}$ elementos.

2. BIOGRAFIA DOS PROTAGONISTAS

Antes de nos aprofundarmos na resolução do problema descrito na seção anterior, vamos apresentar uma curta biografia dos matemáticos que se envolveram com no desenvolvimento deste.

Nicolaus Bernoulli I pertenceu a destacada família de matemáticos suíços, os Bernoulli, sendo sobrinho de Jacob (1655 – 1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), embora atestado como um matemático de pouca produção sua genialidade é bastante reconhecida a ponto de suceder a cátedra de Galileo na Universidade de Pádua em 1716, posteriormente recebeu cátedras na Universidade de Basileia na Suíça, sua terra natal, sendo reitor dessa Universidade por quatro períodos. Além disso conta com honrarias como membro da Academia de Berlim (1713), da Royal Society de Londres (1714) e da Academia de Bologna (1724).

Figura 2 – Nicolaus Bernoulli I

Fonte: página do mathhistory[3]

Desde cedo, os tios de Bernoulli o iniciaram nos estudos da matemática, Jacob Bernoulli foi seu orientador de Mestrado na Universidade de Basileia, título obtido em 1704. Cinco anos depois receberia o título de doutor com uma tese que estudava aplicações da teoria das probabilidades em questões legais.

As maiores contribuições de Bernoulli I estão espalhadas em sua vasta correspondência (mais de 560 textos) com matemáticos de renome como Montmort (1710-1712), Leibniz (1646-1716) e Euler (1707-1783), este último a quem propôs o problema das cartas mal endereçadas.

Leonhard Euler foi um matemático suíço de grande produção nas áreas de geometria analítica, trigonometria, cálculo, teoria dos números e física, sendo considerado o matemático mais prolífico da história. O pai de Euler estudou teologia na Universidade de Basileia onde frequentava as aulas de Jacob Bernoulli com quem adquiriu suficiente conhecimento de matemática elementar para educar e despertar o talento de seu filho, Leonhard.

Paul Euler, pai de Leonhard pretendia para seu filho o mesmo caminho que o seu dentro do ministério protestante, mas Euler que se tornara autodidata, ingressou na Universidade de Basileia em 1720 com 14 anos para obter uma educação geral completa e posteriormente se especializar. Logo Johann Bernoulli descobriu o talento de Euler para matemática. Em 1723 Euler torna-se Mestre em filosofia, começando a estudar Teologia no mesmo ano, seguindo o desejo de seu pai, graças a persuasão e amizade de Johann Bernoulli, Leonhard Euler pôde finalmente se dedicar por completo a matemática.

Em 1726, Euler completou seus estudos na Universidade de Basileia, mesmo ano em que inicia publicações de seus trabalhos. Em 1727, Euler teria a oportunidade de substituir Nicolaus Bernoulli II (1695 – 1726) que havia morrido em St. Petesburgo, cargo que de fato ocupou a partir de 1727, onde teve a oportunidade de conviver com outros grandes cientistas da época, inclusive Daniel Bernoulli (1700 – 1782), detentor da cátedra mais antiga de matemática da Universidade. Quando Daniel Bernoulli retornou a Basileia em 1733, indicou

[3] **Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Nicolaus(I)> Acesso: 10/02/2023**

Euler para substitui-lo. Com maiores ganhos financeiros após esse cargo, Euler pode se casar com uma mulher de família suíça como ele e com qual teve 13 filhos dos quais apenas cinco sobreviveram a infância. Euler dizia que algumas de suas maiores descobertas matemáticas se deram enquanto embalava um de seus filhos nos braços, enquanto outros brincavam em torno de seus pés.

Figura 3 – Leonhard Euler

Fonte: página do mathhistory[4]

Após publicar muitos artigos, Euler publicou seu livro *Mechanica (1736-37)* onde pela primeira vez se tratou da dinâmica Newtoniana a partir da análise matemática. Os problemas de saúde de Euler começaram em 1735 quando ele quase morreu após uma febre. Em 1740 já indicava ter perdido parte da visão, coisa que atribuía a seus trabalhos com cartografia, contudo tinha também uma grande reputação, fazendo com que o imperador Frederico, o grande o convidasse para integrar a nova Academia de Ciências de Berlim, planejada para suceder a antiga Sociedade de ciências. Euler viveu em Berlim por 25 anos e nesse período escreveu cerca de 380 artigos, livros de cálculo, física, análise e o popular Cartas para uma princesa alemã (1768-72). Em 1759, Euler tornou-se o líder da Academia de Berlim e permaneceu até 1766 quando retornou para São Petesburgo.

Um terrível incêndio em 1771 destruiu sua casa, desta tragédia só pôde salvar sua própria vida e seus trabalhos. Neste ponto já estava total e

[4] Disponível em https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/ Acesso: 10/02/2023

irreversivelmente cego e apenas sua inigualável memória e a ajuda de seus filhos e outros membros da Academia permitiu que continuasse com seus trabalhos.

Euler morreu em decorrência de uma hemorragia cerebral em 1783, mas trabalhos inéditos seus continuaram sendo publicados por mais 50 anos aproximadamente. Euler é considerado um grande "resolvedor" de problemas matemáticos, alguns desses problemas abriram novos campos de pesquisa, em particular, acredita-se que Euler tenha se interessado pelo problema das cartas mal endereçadas por se tratar de uma questão curiosa e desafiadora.

2. ENCONTRANDO O NÚMERO DE PERMUTAÇÕES CAÓTICAS PARA AS "N" CARTAS

Vamos reproduzir o raciocínio de Euler na resolução do problema das cartas mal endereçadas para obter uma fórmula conveniente para o cálculo do número de desarranjos de $\boldsymbol{n}$ elementos.

Se temos $\boldsymbol{n}$ elementos para ordenar de modo que nenhum ocupe sua posição sequencial original, temos $\boldsymbol{n-1}$ possibilidades para escolher o primeiro elemento. Daí convém dividir o problema em duas situações.

1°) Supondo que o primeiro elemento original ocupe agora a mesma posição que o elemento escolhido para o iniciar o desarranjo, ou seja, aconteça uma troca de posições entre eles, resta-nos $\boldsymbol{n-2}$ elementos para distribuir nas demais posições, isso é, reduzimos o problema original a $\boldsymbol{n-2}$ elementos. Pelo princípio multiplicativo, o número de casos referentes a essa situação é $(\boldsymbol{n-1})\boldsymbol{D_{n-2}}$.

2º) Escolhido um elemento qualquer para ocupar a primeira posição e o primeiro elemento original cairá em qualquer outra posição que não a do elemento escolhido para o princípio desse desarranjo. Desta forma temos que distribuir $\boldsymbol{n-1}$ em posições diferentes da original. Utilizando novamente o princípio multiplicativo, concluímos que o número de casos referentes a esta situação é $(\boldsymbol{n-1})\boldsymbol{D_{n-1}}$.

É fácil ver que as duas situações são disjuntas e cobrem todos os casos possíveis, assim:

$$D_n = (n-1)D_{n-2} + (n-1)D_{n-1}$$
$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}).$$

O que obtemos acima é uma igualdade recursiva e se pretendemos obter uma solução para um valor específico de n, ficamos obrigados a conhecer a quantidade de desarranjos para os dois números antecessores. Seria conveniente, portanto, reduzir a ordem da recorrência.

Utilizando o resultado obtido vemos que

$$D_3 = 2(D_2 + D_1) \Rightarrow D_3 = 2D_2 + 2D_1 \Leftrightarrow$$
$$D_3 = -D_2 + 3D_2 + 2D_1 \Leftrightarrow$$
$$D_3 - 3D_2 = -(D_2 - 2D_1).$$

Generalizando para $n \geq 4$:

$$D_4 - 4D_3 = -(D_3 - 3D_2)$$
$$D_5 - 5D_4 = -(D_4 - 4D_3)$$
$$\ldots$$
$$D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}).$$

Multiplicando membro a membro as $n-2$ equações para $n \geq 3$, temos:

$$(D_3 - 3D_2)(D_4 - 4D_3)(D_4 - 4D_3) \ldots (D_n - nD_{n-1})$$
$$= (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1)(D_3 - 3D_2)(D_4 - 4D_3) \ldots (D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}).$$

Cancelando os termos que aparecem em ambos os lados da igualdade, temos:

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^n \Rightarrow D_n = D_{n-1} + (-1)^n, \forall n \geq 3.$$

Observe que esta fórmula é mais prática que a anterior, já que podemos resolver o problema específico para um número n, desde que saibamos qual o número de desarranjos para $n-1$, mas Euler não parou por aí.

Utilizando a fórmula obtida para calcular D_3, D_4, D_5, D_6:

$$D_3 = 3D_2 - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$
$$D_4 = 4D_3 + 1 = 4(3D_2 - 1) + 1 = 4 \cdot 3 - 4 + 1$$
$$D_5 = 5D_4 - 1 = 5(4 \cdot 3 - 4 + 1) - 1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 5 - 1$$
$$D_6 = 6D_5 + 1 = 6 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 5 - 1) + 1$$
$$= 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 - 6 \cdot 5 \cdot 5 + 6 \cdot 5 - 6 + 1$$

Euler observou que:

$$\boldsymbol{D_3} = 3!\left(\frac{\boldsymbol{1}}{2!} - \frac{\boldsymbol{1}}{3!}\right)$$

$$\boldsymbol{D_4} = 4!\left(\frac{\boldsymbol{1}}{2!} - \frac{\boldsymbol{1}}{3!} + \frac{\boldsymbol{1}}{4!}\right)$$

$$\boldsymbol{D_5} = 5!\left(\frac{\boldsymbol{1}}{2!} - \frac{\boldsymbol{1}}{3!} + \frac{\boldsymbol{1}}{4!} - \frac{\boldsymbol{1}}{5!}\right)$$

$$\boldsymbol{D_6} = \left(\frac{\boldsymbol{1}}{2!} - \frac{\boldsymbol{1}}{3!} + \frac{\boldsymbol{1}}{4!} - \frac{\boldsymbol{1}}{5!} + \frac{\boldsymbol{1}}{6!}\right)$$

E isso o levou a conjecturar se não seria

$$\boldsymbol{D_n} = \boldsymbol{n}!\left(\frac{\boldsymbol{1}}{2!} - \frac{\boldsymbol{1}}{3!} + \frac{\boldsymbol{1}}{4!} - \frac{\boldsymbol{1}}{5!} + \cdots + \frac{(-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!}\right), \forall \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{2}.$$

Comprovaremos tal conjectura por meio do princípio de indução matemática. Vejamos que

$$\boldsymbol{D_2} = 2!\left(\frac{\boldsymbol{1}}{2!}\right) = \boldsymbol{1}.$$

Suponhamos então que a igualdade é verdadeira para o número $\boldsymbol{n-1}$, assim temos:

$$\boldsymbol{D_{n-1}} = (\boldsymbol{n-1})!\left(\frac{\boldsymbol{1}}{2!} - \frac{\boldsymbol{1}}{3!} + \cdots + \frac{(-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n-1}}}{(\boldsymbol{n-1})!}\right).$$

Multiplicando a igualdade por n:

$$\boldsymbol{nD_{n-1}} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n-1})!\left(\frac{\boldsymbol{1}}{2!} - \frac{\boldsymbol{1}}{3!} + \cdots + \frac{(-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n-1}}}{(\boldsymbol{n-1})!}\right)$$

Por hipótese temos que $\boldsymbol{D_n - nD_{n-1} = (-1)^n \Rightarrow D_n - (-1)^n = nD_{n-1}}$. Fazendo a substituição na igualdade anterior chegamos a:

$$\boldsymbol{D_n} - (-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n-1})!\left(\frac{\boldsymbol{1}}{2!} - \frac{\boldsymbol{1}}{3!} + \cdots + \frac{(-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n-1}}}{(\boldsymbol{n-1})!}\right)$$

$$\boldsymbol{D_n} = \boldsymbol{n}!\left(\frac{\boldsymbol{1}}{2!} - \frac{\boldsymbol{1}}{3!} + \cdots + \frac{(-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n-1}}}{(\boldsymbol{n-1})!}\right) + (-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n}}$$

$$\boldsymbol{D_n} = \boldsymbol{n}!\left(\frac{\boldsymbol{1}}{2!} - \frac{\boldsymbol{1}}{3!} + \cdots + \frac{(-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n-1}}}{(\boldsymbol{n-1})!}\right) + \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n}!}(-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n}}$$

$$\boldsymbol{D_n} = \boldsymbol{n}!\left(\frac{\boldsymbol{1}}{2!} - \frac{\boldsymbol{1}}{3!} + \cdots + \frac{(-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n-1}}}{(\boldsymbol{n-1})!} + \frac{(-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!}\right)$$

$$D_n = n!\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

Esta última fórmula, ao não envolver uma recursão, é bastante vantajosa em relação as demais no sentido de que podemos finalmente responder o problema para um número n qualquer sem precisar conhecer o número de desarranjos para quantidades que antecedem n.

CONCLUSÃO E UMA CURIOSIDADE...

Dizemos que um experimento é determinístico quando ao ser repetido sob condições essencialmente semelhantes produz resultados idênticos. Experimentos cujos resultados produzidos são diferentes ainda que repetidos sob as mesmas condições são chamados de fenômenos aleatórios. Dentro de um experimento aleatório, o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral e estes resultados podem ser chamados de eventos elementares.

Laplace apresenta estes conceitos em seu "Ensaio filosófico sobre as probabilidades e define a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada para o número total de casos possíveis. Em notação moderna, se designamos por Ω o espaço amostral e por S um conjunto formado por certos eventos de interesse, as palavras de Laplace se traduzem pela fração

$$P = \frac{\#\Omega}{\#S}.$$

Se pensarmos em um sorteio honesto na brincadeira do amigo oculto com "n" participantes, temos um evento aleatório tal que $\#\Omega = \mathbf{n}!$ e $\#S = D_n$, já que pretendemos que todos os n participantes tirem quaisquer outros números que não o seu (assim como no problema das cartas, nenhuma carta deveria entrar em seu próprio envelope). Neste problema temos $\#\Omega = \mathbf{n}!$ e $\#S = D_n$, utilizando a expressão encontrada ao fim da seção 2 na definição de probabilidade dada por Laplace chegamos em:

$$P_n = \frac{D_n}{n!} = \frac{n!}{n!}\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

A tabela a seguir mostra aproximações de resultados obtidos a partir dessa fórmula, para alguns valores de n:

Tabela 1 – Probabilidade do sorteio do amigo secreto dar certo

n	1	2	3	4	5	6	12	24
P_n	0	0,5	0,333	0,37555	0,36667	0,36806	0,36787944	0,3678794412

Fonte: os autores (2022)

É curioso observar essa tabela, nos parece que a medida que n aumenta, P_n tende a se aproximar de 0,36787944. Esse número, alvo de nossa curiosidade, é nada menos que $\frac{1}{e}$ e podemos provar que tal convergência de fato se dá. Em outras palavras, provaremos que $n \longrightarrow \infty$ então $P_n \to \frac{1}{e}$.

Para fazer tal demonstração necessitamos utilizar alguns conhecimentos sobre séries numéricas e sua convergência. Antes de mais nada, vamos provar que D_n é p número inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$.

De fato, sabendo que a expansão em séries de potência de e^x é tal que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Fazendo $x = -1$ em tal expansão, concluímos que

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots$$

Assim,

$$\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| = \left|n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) - n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)\right|$$

$$= n!\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots\right|$$

Aplicando a desigualdade triangular:

$$\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| \leq n!\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots\right)$$

Portanto,

$$\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

Observando que o 2° membro da última desigualdade é uma série geométrica de razão $\frac{1}{n+1}$, logo

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

Disso concluímos que

$$\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Se $n \geq 2, então\ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$, desta forma comprovamos que D_n é necessariamente um inteiro cuja distância a $\frac{n!}{e}$ é menor que $\frac{1}{2}$, para todo $n \geq 2$.

Usando agora esta afirmação, observamos que:

$$\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq D_n - \frac{n!}{e} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{n!}{e} - \frac{1}{2} \leq D_n \leq \frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{2n! - e}{2en!} \leq \frac{D_n}{n!} \leq \frac{2n! + e}{2en!}$$

Aplicando o Teorema do Confronto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n! - e}{2en!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2n! + e}{2en!}$$

$$\frac{1}{e} \leq \lim_{n\to\infty} P_n \leq \frac{1}{e}$$

De modo que resta-nos concluir

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{e}.$$

Este resultado é sumamente interessante, mormente quando nosso ponto de partida se deu em um problema de contagem, donde usualmente são os números inteiros que desempenham total protagonismo. Desta forma ilustrase mais uma vez o potencial da relação entre a Matemática e sua História como fonte de anovas abordagens de problemas interessantes que podem ser revisitados e produzir (re)descobertas curiosas.

REFERÊNCIAS

DE MORAIS FILHO, D. C.; FERREIRA, M. S. A. **O problema das cartas mal endereçadas de Nicolaus Bernoulli e Euler: uma nota sobre como Euler resolveu brilhantemente um problema interessante**. Universidade Federal de Campina Grande – PE. http:www.dme.ufcg.edu.br/pet/arquivos/o problema das cartas mal endereçadas de nicolaus bernoulli e Euler.pdf> Acesso em 06 jan. 2017.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio**. 6ª edição. Rio de Janeiro – RJ. SBM, 2006. P. 67 – 146.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. 9ª edição. Rio de Janeiro – RJ. SBM, 1991, p. 73 – 77.

MUNIZ NETO, A. C. **Fundamentos de Cálculo**. 1ª edição. Rio de Janeiro – RJ. SBM, 2015, p. 129 – 130, 326 – 328, 350 – 357, 421 – 423.

OLIVEIRA, F. A.; CUNHA, G. G..; CUNHA, G. D.; MEDEIROS, T.; Um estudo de permutações caóticas. **FAMAT em Revista**. Uberlândia – MG. V. 13. Dez. 2009.
http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/FAMAT Revista 13 1.pdf > Acesso: 07 jan. 2017.