DAS FLUXÕES ÀS DERIVADAS: UMA ABORDAGEM FUNDAMENTADA NA OBRA DE COLIN MACLAURIN`

Iran Abreu Mendes[1]

Evanildo Costa Soares[2]

RESUMO

Este artigo tem como objetivo apresentar um estudo sobre derivada fundamentada na obra de Colin MacLaurin sobre o tratado das fluxões publicado em 1742. A citada obra, em conexão com os estudos oriundos do trabalho desenvolvido por Newton relacionado a pesquisa envolvendo o método fluxional, buscará direcionar uma nova proposta de ensino de cálculo no Ensino Superior. Sob essa perspectiva, a derivada quando interligada ao estudo de fluxão e a investigação histórica da matemática, oferecerá mecanismo os quais norteará a identidade conceitual do cálculo potencializando novos métodos, regras e propriedades, que servirão de subsídios para os futuros professores na compreensão desse conteúdo no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Palavras-chave: Derivada. Fluxão. Investigação Histórica.

INTRODUÇÃO

Os primeiros registros históricos do cálculo diferencial integral surgiram no mundo grego com o estudo relacionado ao paradoxo de Zenão, especificamente, o de "Aquiles e a Tartaruga" sob a abordagem do infinito e foram expandidos na idade moderna a partir do advento da imprensa e das inovações tecnológicas, as quais contribuíram para o desenvolvimento da ciência. A matemática teve um papel relevante naquela época quando emergiram as primeiras pesquisas envolvendo a álgebra e a teoria dos números, culminando com uma reestruturação do estudo do cálculo desenvolvido inicialmente por Newton e Leibniz.

Este artigo tem como objetivo desenvolver um estudo sobre a derivada baseado na obra de MacLaurin sobre o tratado das fluxões. Para isso, faremos um breve relato histórico destacando a importância do método fluxional, o qual formaliza uma nova compreensão para o estudo de derivada através de suas regras e métodos de cálculo de modo a direcionar a compreensão sobre a derivada enésima, diferenciando-se do padrão conteudístico apresentado pelos principais livros de cálculo formulado a partir do uso de limites e funções.

[1] Professor titular da Universidade Federal do Pará (UFPA). iamendes1@gmail.com
[2] Doutorando pelo programa do pós-graduação PPCENM da UFRN. nildo2604@gmail.com

Os estudos relativos à proposta sobre a derivada numa perspectiva relacionada ao método fluxional podem ser explorados como mediadores didáticos e conceituais no ensino de cálculo nos cursos de licenciaturas em Matemática. Para a realização deste trabalho foi utilizado a pesquisa bibliográfica como instrumento metodológico. Essa proposta didática, quando conectada ao uso da investigação histórica da matemática para o ensino, oferecem mecanismos viáveis os quais nortearão a identidade conceitual do cálculo, potencializando novos métodos e estudos que servirão de subsídios para os futuros professores na compreensão deste conteúdo no processo de ensino e aprendizagem da matemática de forma a ressignificar e ampliar as possibilidades de sua abordagem no ensino superior.

A ESTRUTURAÇÃO DO PROCESSO DE FLUXÃO NA CONCEPÇÃO NEWTONIANA

Para Silva (2010) o marco inicial do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral aconteceu no período do Renascimento, que culminou com a queda da cidade de Constantinopla em 1453 – Capital do Império Bizantino; a invenção da imprensa – em 1500 por Gutenberg, e a conquista da América, em 1492. Esse período foi marcado pela influência da Europa Ocidental sobre as restantes regiões do globo, momento em que as Ciências Naturais demarcaram conexões como nos campos da Matemática e da Física, inserindo mudanças nos estudos científicos, que originaram novas formas de pensar sobre o universo – o heliocentrismo, bem como cálculos astronômicos estabelecidos pelas novas leis explicativas do movimento e da rotação da terra em torno do sol conhecida como leis de Kepler.

Os estudos e as idealizações iniciais relacionadas ao cálculo infinitesimal foram propostos por Isaac Newton (1642 – 1727), o qual era Alquimista, Físico, Matemático, Astrônomo, Filósofo, Teólogo e Cientista do século XVII. Ele foi considerado a primeira pessoa a desenvolver um estudo mais aprofundado sobre a construção lógica e aritmética do cálculo. Ainda muito jovem, ele se apoia nos trabalhos de vários cientistas e estudiosos conforme comenta este autor:

> Muito trabalho para um estudante que acaba de fazer vinte anos. E, no entanto, se julgarmos por seus escritos, entre dezembro de 1664 e novembro de 1665, não foi o estudo da filosofia natural que Newton dedica mais energia, mas a matemática. Ele lê partes dos Elementos de Euclides, superficialmente. Porém, foi a Geometria de Descartes e a Arithmetica infinitorum de John Wallis que

> realmente o fascina. Foi a leitura desses dois livros que deu início às pesquisas que, em dois anos, fizeram de Newton o maior matemático de sua época, levando-o à primeira formulação da teoria das fluxões (PANZA, 2003, p.6, tradução nossa).

As contribuições desses trabalhos foram imprescindíveis para que Newton pudesse desenvolver seus estudos relacionados à área da Matemática e da Física. De acordo com Mendes (2019) no que diz respeito a este autor, considero importante destacar que ele estudou no Trinity College em Cambridge, onde conheceu as produções científicas de Descartes, Galileu, John Wallis e Isaac Barrow, dentre outros. Seus estudos foram interrompidos entre 1665 e 1666 devido uma praga assolar a área de Londres naquele período. Este Período foi muito importante para Newton, que ficou conhecido como anni mirabiles (anos maravilhosos), os quais lançou as bases de sua mecânica, forneceu estudos acerca da gravidade, óptica e os princípios da teoria das fluxões.

De acordo com Panza (2010, p.516), os estudos sobre às curvas direcionou Newton para uma proposta de trabalho chamada *De Analysis*, ou seja, trata-se de uma abordagem envolvendo quadraturas e suas tangentes. “Esse tratado é uma espécie de *instant book*[3] que ele escreveu para expor alguns de seus resultados referente a problemas sobre curvas”. Seguindo as pesquisas realizadas por Wallis fundamentados na quadratura de figuras curvilíneas, que trata sobre a determinação da área de uma superfície limitada por uma curva ou do volume de um sólido limitado por superfícies curvilíneas. Ao considerar tal abordagem, Newton utilizou as áreas como soma estáticas de infinitesimais ao transcrever uma nova abordagem das quadraturas e tangentes passando a tratá-las cineticamente como áreas varridas por uma linha móvel.

Dessa maneira, foi praticamente na redação do Tratado de Outubro de 1666 que Newton realizou uma investigação mais relevante sobre curvas envolvendo movimento. Para Calazans (2014, p.57) este cientista inicia uma série de redações com o propósito de desenvolver e explicitar a “generalidade da solução geométrica para problemas cinemáticos de composição de movimentos, sustentando que as soluções algébricas são, na verdade, casos particulares”. Este tratado,

[3] Era um tipo de caderno que Newton utilizou para fazer anotações e expor alguns dos seus resultados envolvendo determinados problemas sobre curvas.

posteriormente, resultará na produção do *De Methodis*. Para este autor, as seis primeiras proposições de um total de oito, neste estudo são relacionados a composição do movimento.

Os esforços de Newton sobre a construção do De Methodis consistiam em expor uma teoria envolvendo movimento e velocidade que solucionasse os problemas geométricos. Segundo Panza (2010), nesse trabalho, introduz-se a concepção de cinemática, em que ele adverte sobre a redução de vários problemas matemáticos a somente dois problemas gerais:

> 1) Dada a distância do espaço continuamente (isto é, em qualquer tempo), encontrar a velocidade do movimento em qualquer tempo indicado.
> 2) Dada a velocidade do movimento continuamente, encontrar o comprimento do espaço descrito em qualquer tempo indicado (PANZA, 2010, p.519).

De acordo com este autor, para Newton, estes dois problemas consistem em definir a velocidade para um movimento contínuo envolvendo o espaço e o tempo. Com isso, percebe-se que os esforços imposto por ele quando o movimento descrito, pressupõe que as figuras geométricas em movimento recebam acréscimos ou decréscimos contínuo quando são descritos. A princípio, Newton usa a figura/objeto/partícula em movimento ao percorrer uma linha ou reta; e de forma semelhante, as linhas descrevem planos. Para Calazans (2008, p.32) “Quando o movimento é “acelerado ou retardado”, isto é, entende-se que o movimento nasci ou esvaece (dependendo do caso a ser considerado), as linhas e os planos recebem acréscimos ou decréscimos de grandezas”.

Dessa maneira, quando Newton utiliza o acréscimo ou decréscimo de grandezas incorporam-se elementos importantes: o tempo e a velocidade. Para a cinemática newtoniana quando ocorrem um aumento ou a diminuição de grandezas num determinado tempo sobre uma linha ou reta, existe uma velocidade presente no percurso. Em sua interpretação, para Calazans (2008), Newton afirma que o tempo é uma afecção comum descritos pelas grandezas alcançada durante o percurso, o que pode surgir velocidades diferentes.

Para Calazans (2008, p.34) há um entendimento subentendido sobre o tratamento da velocidade, “está o caráter indireto do procedimento para mensurála: mediante a comparação entre as quantidades constitutivas do movimento”. No Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum[4] (1671), não existe uma definição própria do conceito de velocidade. Entende-se que ele adquiriu esse conceito de outros estudiosos e cientistas renomados. Tem-se uma visão interpretativa de que a velocidade seja uma grandeza *intensiva*, no sentido que ela só pode ser mensurada indiretamente por outras grandezas.

Na obra do *De Methodis* de 1671, Newton estrutura esta concepção sobre três conceitos centrais. *Quantidade fluente, fluxão e momento*. Para Calazans (2008, p.36) “A *quantidade fluente* nada mais é do que a própria quantidade espacial descrita pelo movimento” e são representadas pelas linhas, planos e sólidos. Os símbolos utilizados nas equações para tais quantidades são as letras finais do alfabeto: v, x, y, e z. Neste caso, as quantidades fluentes são descritas pelo movimento contendo alguma velocidade. As velocidades pelas quais toda fluente é aumentada pelo seu movimento gerador é chamada de *fluxão* e são representas por letras pontuadas $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$. Podem ser empregadas nesse método o uso de constante, que são representadas pelas letras iniciais do alfabeto a, b, c e d. Nessa última concepção, *os momentos* das quantidades fluentes segundo Guicciardini (2009, p.207) são “as adições infinitamente pequenas pelas quais essas quantidades aumentam durante cada intervalo de tempo infinitamente pequeno”, conforme mostra a figura a seguir:

Figura 1: Representação do movimento descrito por Newton

Guicciardini (2009, p.181)

Sendo assim, considera-se um ponto que flui com velocidade variável ao longo de uma reta. Dessa forma, entende-se que a distância percorrida num determinado instante t é a *fluente,* a velocidade adquirida no percurso é a *fluxão*. Para Guicciardini (2009) as partes indefinidamente ou infinitamente pequenas por meio das quais a fluente aumenta após os intervalos de tempo são os *momentos*

4 Tratado sobre o método das séries e fluxões, publicado por Isaac Newton em 1671. É comum encontrarmos referências a esse tratado sob a expressão *De Methodis*.

da quantidade fluente. Newton observou ainda que os *momentos* são "Como a velocidade do fluxo" (ou seja, as fluxões). De acordo com Calazans (2008, p.37) “se duas quantidades fluentes são representadas por x e y, os seus *momentos* entrarão nas equações, respectivamente, com os seguintes símbolos: $\dot{x}$o e $\dot{y}$o. Dessa forma, existe uma multiplicação entre a fluxão com o símbolo *o* (letra grega ômicron). A principal função desta letra grega é marcar a presença do tempo, o qual é representada pelo infinitamente pequeno gerado pelo percurso da fluente sobre a reta.

Com isso, os *momentos* são representados pela fluxão da quantidade fluente e está relacionada a multiplicação pelo marcador tempo. Para Calazans (2014, p.78) “se pensarmos a fluxão como análoga à velocidade, ao multiplicá-la pelo tempo, obteríamos o espaço percorrido”. Desse modo, o momento pode ser acrescentado à quantidade fluente (grandeza espacial) tornando-se um aumento a esta quantidade quando sofre naquela parcela indefinidamente pequena do tempo e serão representados por x + $\dot{x}$o e y + $\dot{y}$o. Nisto, percebe-se uma semelhança com a ideia de limite ou do infinitamente pequeno, que nesta época estava relacionada a noção de infinitésimos.

Em síntese, no *De Methodis*, Newton utilizou o método das séries e fluxões a vários problemas. Os principais consistiam em encontrar máximos e mínimos de grandezas variadas, como determinar tangentes e curvas planas e como calcular áreas curvilíneas e comprimento de arcos. Devido a quantidade gerada por um fluxo contínuo, tais problemas seriam reduzidos com base em seus dois problemas: O primeiro, ao ser concedido o comprimento do espaço continuamente, torna-se possível encontrar a velocidade do movimento em qualquer momento indicado, denomina-se *método direto da fluxão* e serão utilizados para encontrar os problemas relacionados a tangente, máximos, mínimos e curvaturas; O segundo, ao ser dado a velocidade do movimento continuamente, encontrar o comprimento do espaço descrito a qualquer momento proposto é conhecido como *método inverso da fluxão* e são empregadas para problemas relacionados a localização de áreas curvilíneas e comprimentos de arco.

De acordo com Guicciardini (2009) o *De Methodis* é apreciado no decorrer da história por publicação semelhante. Porém, nem todos tiverem acesso ao manuscrito completo para a impressão. Coube a John Colson, publicar em 1736 "o método das Fluxões e Séries Infinitas. Essa obra retoma o estudo realizado por Newton sobre o *De Methodis* de 1671 e, consequentemente, e de sua atualização realizado por ele no ano de 1690 a partir do trabalho sobre *De quadratura*[5]. Por outro lado, seus cálculos sempre eram iniciados por quantidade finitas e inteligíveis. Então, ele se indagava sobre quais seriam os possíveis resultados quando essas quantidades fossem diminuídas ao infinito.

A ideia de fluxão conforme denota Newton, estava relacionada à solução de problemas envolvendo os estudos sobre curvas, quadratura e tangente por meio do estudo do movimento. Deve-se reconhecer que os aprimoramentos sobre este método foram importantes para o estudo de derivadas e integrais seguindo uma noção intuitiva do conceito de limite (infinitésimos). Assim, as noções referentes ao método usual proposto por Newton consistem em encontrar o crescimento, momento ou fluxo de qualquer potência indefinida x^n da quantidade variável x, promovendo uma investigação que não proporcione espaço para quaisquer exceções referentes a este método.

Após a morte de Newton, para MacLaurin (1742), quem ficou responsável por boa parte das produções científicas realizados por ele, foi Conduitt, que era esposo da sobrinha de Newton. E outra parte também foram inseridas na Universidade de Cambridge. As divulgações científicas referente aos seus trabalhos foram apreciados pela comunidade acadêmica e estudiosos daquela época. Antes de Conduitt falecer, ele desejou ajudá-lo em reconhecimento e gratidão ao seu grande patrono que empreendeu exitosamente no estudo sobre a História do Progresso que a Filosofia havia realizado antes de Newton. Dessa forma, Conduitt não teve tempo de apreciar tais estudos sobre as magníficas invenções de Newton devido a sua morte, por isso boa parte das suas obras foram entregues a Colin MacLaurin, o qual durante a sua vida acadêmica adquiriu uma grande afinidade com os trabalhos realizados por Newton.

5 A versão composta no início da década de 1690 foi revisada para publicação em 1703 e apareceu sob o título de *Tractatus de Quadratura Curvarum in Newton*, Opticks (1704).

A CONCEPÇÃO DE MACLAURIN ACERCA DAS FLUXÕES NO ESTUDO DE DERIVADA

A concepção de fluxão adotada por MacLaurin, que foi um matemático escocês do século XVIII, o levou a realizar um trabalho sobre A treatise of fluxion (um tratado das fluxões) publicado em 1742 a fim de dar respostas as inquietações e dúvidas apresentadas por Berkeley na obra “o Analista” de 1734 quanto as possíveis resoluções dos cálculos realizados por Newton sobre o método fluxional. O estudo realizado por ele superou as expectativas dos críticos intelectuais ao redesenhar uma nova proposta de análise das fluxões sem perder de vista as principais características idealizadas por Newton quando concebeu o significado do que fosse a fluxão em seus trabalhos relacionados a Física e o *Principia* publicado em 1687.

A característica central de MacLaurin concentrava-se em fugir de sua base específica e da independência dos infinitesimais. Ele seguiu as ideias adotadas por Robins e organizou seu tratado em duas partes principais: buscou explicar a noção do que fosse uma fluxão conforme mostra Issac Newton em seu livro publicado em 1736, imaginando que não pode haver dificuldade em conceber velocidade onde quer que haja movimento; as quantidades geradas pelo movimento e suas velocidades funcionam como uma ferramenta básica e indefinida sob a ótica de um percurso envolvendo movimento uniforme para Grabiner (2005) e MacLaurin (1742).

Para Bruneau (2011) o primeiro ponto de destaque da teoria da fluxão proposto por MacLaurin tem uma visão corpuscular ou mesmo atomística do espaço e dos corpos, pois recusa considerar a fluxão como algo infinitamente pequeno. Nos seus dois trabalhos publicados em 1742 sobre o tratado das fluxões, ele apresenta: em sua primeira obra, cujo título é: “*das fluxões das grandezas geométricas*” uma definição, que envolve velocidade durante um percurso sobre a reta. A ideia subjacente de espaço, movimento e tempo. De fato, ele considera que os objetos matemáticos (a reta, uma curva, uma superfície) são descritos gerando outro objeto que tem uma velocidade, o qual ele chama de fluxão do objeto considerado. Antes de definir ou não a velocidade de um objeto material, é necessário que ele implemente o espaço e o tempo, que são apresentados da seguinte maneira:

> Não há quantidade que concebamos mais claramente do que a porções limitadas de espaço e tempo. São, na verdade, compostos de partes perfeitamente uniformes e semelhantes. As do espaço existem todas juntas, as do tempo fluem continuamente. Mas, pelo movimento eles se medem reciprocamente. Partes do espaço são permanentes; porém, sendo sucessivamente descrito pelo movimento, podemos conceber o espaço fluindo da mesma maneira que o tempo. O tempo perece continuamente; O tempo é projetado para fluir sempre em um curso uniforme, que serve para medir as mudanças de todas as coisas (MACLAURIN, 1749b, vol. I, p.3, tradução nossa).

Assim, a sua definição de movimento é muito próxima à de Newton e é semelhante à usada por Berkeley em sua obra “O analista” de 1734. Para tornar mais consistente sua teoria sobre o método fluxional, ele recusa a considerar o tempo ou espaço como indivisíveis. Para MacLaurin, o tempo e espaço são dados geométricos, a velocidade é considerada como uma relação entre espaço e tempo e como a razão do espaço percorrido durante um determinado tempo é parte integrante do campo da geometria. Com isso, entende-se que velocidade de um movimento uniforme é:

> Medida pelo espaço que é percorrido em um determinado tempo. Se a ação do poder varia, sua ação em cada período de tempo não é medida pelo efeito que efetivamente produz após cada período, mas pelo efeito que teria produzido se sua ação tivesse continuado uniformemente após esse período; da mesma forma, a velocidade de um movimento variável, em cada período de tempo dado, não é medida pelo espaço que é realmente percorrido após esse período em um determinado tempo, porém pelo espaço que teria sido percorrido se o movimento tivesse continuado uniformemente após este tempo (MACLAURIN, 1749b, vol. I. p.4-5, tradução nossa).

Desse modo, MacLaurin propõe uma definição de velocidade em um ponto completamente livre da estrutura das primeiras e últimas razões ou infinitesimais e, portanto, foge das críticas sobre a definição da velocidade. Em cada ponto estudado, existem apenas velocidades de movimentos uniforme e são representadas por razões de quantidade finita. A ideia proposta e que o diferencia da abordagem newtoniana leva em consideração a velocidade nesse percurso, o qual possui um movimento constante na trajetória.

De acordo com Mendes e Soares (2022), dois princípios foram divulgados na obra publicada em 1742 sobre A Treatise of Fluxions (O Tratado das Fluxões). O primeiro ocorre quando a quantidade gerada é considerada lenta e é chamada de *Fluente.* Isso ocorre porque as quantidades a serem aumentadas e diminuídas, ou totalmente geradas pelo movimento, ou por um fluxo contínuo análogo a ele. E o segundo, que é a velocidade com que uma quantidade flui, em qualquer período do tempo em que deve ser gerada, é chamada de *Fluxão*, ou seja, sempre medida pelo acréscimo ou decréscimo que seria gerado em um dado momento por esse movimento, se este for continuado uniformemente a partir desse período, sem qualquer aceleração ou retardamento; ou pode ser medido pela quantidade gerada em um determinado tempo por um movimento uniforme que é igual ao movimento gerador naquele período.

Nesse sentido, observa-se que a convicção sobre a fluxão está relacionada a velocidade da partícula, corpo ou figura nesse processo contínuo gerado pela quantidade com a presença do tempo, o qual pode ser denominada de *derivada*. Portanto, MacLaurin estabelece que os fundamentos do estudo vinculado ao cálculo infinitesimal proposto por Newton estarão mais conectados a ideia de fluxão envolvendo o estudo de quadratura da curva, que podem ser explorados por meio dos conteúdos sobre séries infinitas e de potências.

Desse modo, a obra de MacLaurin (1742) é de certa forma mais detalhada e abrangente em relação ao trabalho desenvolvido por Newton (1736), pois ao utilizar o método das fluxões de forma mais sistematizada através do método algébrico. Sendo assim, esse mecanismo algébrico possibilitam uma melhor compreensão a respeito de suas propriedades, métodos, técnicas e aplicações viáveis que se assemelham ao estudo sobre derivada por meio do uso de funções conforme abordam os livros de cálculo diferencial e integral no ensino superior.

Assim, as fluxões são responsáveis pelos processos de derivação, os quais estão diretamente relacionados à disciplina de cálculo diferencial e integra, porém este tema não é explorado nos livros de cálculo no ensino superior. Dessa maneira, os estudos oriundos do processo de derivação abordados sobre este método em seus processos geradores de quantidades buscarão configurar uma representação do termo geral de derivada bem como suas regras, propriedades e demonstrações.

REPRESENTAÇÃO DO TERMO GERAL DE UMA DERIVADA

A nova concepção envolvendo o estudo de derivada oriundo da fluxão denota um outro viés de análise para o entendimento desse conteúdo com ressignificações relevantes para a compreensão deste assunto, o qual os livros de cálculos não se apropriam desse conhecimento. Essa nova possibilidade de abordagem, com base nos estudos sobre fluxões, expressa-se como sendo de fundamental importância para uma melhor compreensão do estudo de derivada de forma a ampliar e complementar o que os livros de cálculo abordam sobre esta temática a fim de que possa oferecer subsídios consistentes aos futuros docentes no seu processo de aprendizagem da matemática no ensino superior.

Dessa maneira, a fluxão ao ser representada pela derivada foi analisada sem uso direto do conceito de limite de uma função. O propósito desse método, foi realizado inicialmente pelo movimento de quantidades geradas ao ser deslocados através de objeto/partículas/figura realizadas por meio do movimento contínuo sobre a reta em função do tempo. Sendo assim, de acordo com MacLaurin (1742) as fluxões das quantidades devem-se, portanto, compreender que *quaisquer medidas de suas taxas repetitivas de aumento ou diminuição, enquanto variam (ou fluem) conjuntamente*. Não pode haver dificuldade em determinar as medidas quando as quantidades aumentam ou diminuem por diferenças sucessivas quando estão sempre na mesma proporção invariável entre si. Assim sendo, com esse propósito, tem-se:

> Enquanto A ao aumentar torna-se igual a A + *a*, ou ao diminuir, torna-se igual a A – *a*, 2A torna-se igual a 2A + 2*a*, ou a 2A – 2*a*; e como 2A aumenta ou diminui a um ritmo maior do que A na proporção de 2*a* para *a*; Se a fluxão de A pode ser supostamente igual *a*, a fluxão de 2A deve ser igual a 2*a [...]* em qualquer proporção atribuível, uma quantidade pode ser sempre definida aumentará ou diminuirá em uma razão maior ou menor do que A em qualquer proporção, ou que deverá ter sua fluxão maior ou menor que a fluxão de A em qualquer razão. Nesse caso, a razão da fluxão e que as diferenças na mesma quantidade aumentam ou diminuem (MACLAURIN, 1742, p.167, tradução nossa).

O problema da razão em relação a fluxão concentra-se como as diferenças na mesma quantidade aumentam ou diminuem. Dessa maneira, a fim de decifrar essa ideia, MacLaurin (1742) propõe que o problema central consistia no seguinte:

"*Dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação entre suas fluxões, e reciprocamente".* O método de Newton aplicado ao estudo envolvendo a curva, cuja representação é y = x^n desenvolvida pelo estudo sobre fluxão determina a fórmula da derivada enésima conforme veremos a seguir:

Se o é um "intervalo de tempo infinitamente pequeno", $\dot{x}o$ + $\dot{y}o$ são os crescimentos infinitesimais pequenos de x e de y. Substituindo y + $\dot{y}o$ e x + $\dot{x}o$ na relação (entre as quantidades fluentes) y = x^n obtém-se:

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$$

$$y + \dot{y}o = x^n + nx^{n-1}\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\dot{x}o)^2 + \cdots$$

Substituindo-se y = x^n e cancelando, tem-se:

$$x^n + \dot{y}o = x^n + nx^{n-1}\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\dot{x}o)^2 + \cdots$$

$$\dot{y}o = nx^{n-1}\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\dot{x}o)^2$$

Agora, dividindo por o, a série, obtém-se:

$$nx^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}o + \cdots$$

Sendo assim, conclui-se:

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}o + \cdots$$

Newton elimina todos os termos que contém o como fator para obter:

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$$

Essa expressão para MacLaurin (1742, p.172) refere-se seguinte proposição: *A fluxão da raiz x sendo considerado igual a $\dot{x}$, a fluxão da potência x^n será igual a $nx^{n-1}\dot{x}$.* Porém, MacLaurin utiliza para chegar a este resultado o método envolvendo redução ao absurdo para a sua compreensão exata diferenciado do método proposto por Newton.

Para Bluneau (2005) uma melhor compreensão no que se refere a fluxão de x^n, tem-se que: sabendo que x^n – $(x – u)^n$ e $(x + u)^n$ - x^n são acréscimos de x^n onde u é um acréscimo de x. Com isso, primeiramente, ele assume que a fluxão de x^n > $n\dot{x}x^{n-1}$. Seja r positivo tal que fluxão (x^n) = $n\dot{x}x^{n-1}$ + r. Seja k um acréscimo positivo tal que $k = \sqrt[n-1]{x^{n-1} + \frac{r}{n\dot{x}}} - x$. Portanto, $n\dot{x}(x+k)^{n-1}$ = $n\dot{x}x^{n-1}$ + r = fluxão(x^n). Seja u tal que u < k . Então como $\dot{x}$:u = $n\dot{x}(x+k)^{n-1}$: $nu(x+k)^{n-1}$, assumindo que fluxão (x) = u, temos que: fluxão (x^n) = $nu(x+k)^{n-1}$. Sabendo que $nu(x+k)^{n-1}$ > $nu(x+u)^{n-1}$ > $(x + u)^n$ - x^n o que é uma contradição pelo fato de que a fluxão de x^n é menor que $(x + u)^n - x^n$. Logo, a fluxão $(x^n) \leq n\dot{x}x^{n-1}$. No segundo momento, ele assume que fluxão $(x^n) = n\dot{x}x^{n-1} - r$, onde r é positivo e de modo análogo acontece uma contradição. A conclusão que se obtêm é: fluxao de x^n é $nx^{n-1}\dot{x}$.

Sendo assim, para Guicciardini (2009), observa-se que o aumento *o* é finito e que o cálculo visa determinar o limite da razão $\frac{(x+o)^n - x^n}{o}$ à medida que *o* tende a zero. O limite é aquele atingido precisamente quando as duas quantidades desaparecem simultaneamente; não é um limite calculado quando as quantidades diferem de zero por uma quantidade infinitesimal. Enquanto para MacLaurin, a fluxão de x^n utilizadas por meio de diferenças sucessivas e com o método redução ao absurdo conduz a mesma expressão obtida por Newton usando a razão entre as quantidades fluentes. O processo descrito acima por Newton e MacLaurin, de fato, ao cálculo da derivada enésima conforme menciona os livros de cálculo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A ideia proposta por Newton em seus cálculos conforme mencionei acima, não possuía uma definição formal de limite, muito embora tenha se concretizado por meio do uso de séries infinitas empregada pelos estudos envolvendo a caracterização de curvas ou por uso de diferenças sucessivas empregadas por MacLaurin para a obtenção da fluxão enésima tem uma semelhança próxima na resolução da fórmula da derivada enésima encontrada nos principais livros de cálculo diferencial e integral abordado pelo estudo envolvendo limite e derivada de uma função.

Portanto, os princípios e métodos formulados por MacLaurin em suas obras buscam subsidiar o entendimento sobre a ideia de derivada, o que se define inicialmente como sendo a velocidade com que uma quantidade flui numa partícula com movimento uniforme. Para Mendes e Soares (2022), a fluxão definida por essa velocidade consiste num entendimento do que seja a derivada, o que em outras palavras, é o momento em que a curva se torna reta para a função num determinado ponto ou *momento* em que a quantidade gerada (velocidade) é obtida num determinado acréscimo ou decréscimo de uma partícula sobre a reta proporcionado a compreensão da derivada enésima como uma nova proposta de estudo de cálculo no ensino superior em matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A disciplina de cálculo diferencial e integral configura-se como imprescindível para o ensino de matemática. Considerando que ao longo da história este tema foi marcado pelo avanço de estudos relacionados ao infinito, culminado com invenções conectadas aos paradoxos entre outros métodos de modo que utilizassem formas de aproximação de áreas de figuras planas com base no método de exaustão na idade moderna, as primeiras investigações sobre o cálculo diferencial foram consolidadas nos séculos XVII e XVIII. A fluxão, termo criado por Newton, inicialmente usado para entender como se processava a evolução e o comportamento de certos tipos de curvas.

Sendo assim, a proposta sobre a fluxão de Newton orientada sobre o estudo de curvas tem uma nova compreensão envolvendo o movimento da partícula ao percorrer o espaço descritas sobre a reta, plano ou superfície. As construções lógicas o levaram a direcionar uma investigação sobre o comportamento da velocidade (quantidade gerada), o qual dependia do *momento* em relação aos acréscimos e decréscimos no percurso sobre a reta. Esse mecanismo de encontrar a velocidade o fez emergir para caracterizar uma nova proposta do estudo sobre derivada no Ensino superior de Matemática.

Assim, a pesquisa desenvolvida por Newton sobre a fluxão foi aperfeiçoada por MacLaurin ao caracterizar a mesma ideia formulada por Newton, porém com outro viés termológico no campo algébrico ao propor estudos que fortalecessem o entendimento do método fluxional são conectadas ao ensino do cálculo diferencial e integral, principalmente, quando se estabelece que as fluxões deveriam ser usadas no movimento quando a quantidade gerada (velocidade) é obtida num determinado acréscimo ou decréscimo de uma partícula sobre a reta através do movimento uniforme.

Portanto, as formulações sobre a caracterização das fluxões proporcionou a MacLarin a descrever um novo modelo de estudo envolvendo a disciplina de cálculo diferencial e integral formulada neste artigo pela compreensão da fluxão ou derivada enésima bem como suas propriedades, regras, métodos e demonstrações fazem parte de uma pesquisa realizada no doutorado (em construção) pelo programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do norte (UFRN).

REFERÊNCIA

BRUNEAU, Olivier. **Pour une Biographie intellectuelle de Colin Maclaurin (1698-1746):** ou l'obstination mathématicienne d'un newtonien. 2005. 477f.Tese (Doutorado em Epistemologie, Histoire des Sciences et des Techniques) - Université de Nantes, França, 2005.

BRUNEAU, Olivier. L'espace et le temps chez Maclaurin: le cas de la figure de la terre. **Philosophia Scientiae**, France, 15 (3), p.17-34, 2011.

CALAZANS, Alex. Newton e Berkeley: **As críticas aos fundamentos do Método das Fluxões n'O Analista.** 2008. 111f. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Centro de Educação Letras e Artes da Universidade Federal de Paraná - UFPR, Curitiba, 2008.

CALAZANS, Verônica Ferreira Bahr. **A Filosofia da matemática nos Principia de Newton e suas implicações ontológicas**. 2014. 156f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Universidade de São Paulo – USP, São Paulo, 2014.

GUICCIARDINI, Niccolò. **Isaac Newton on mathematical certainty and method.** United States of America: Massachusetts Institute of Technology, 2009.

PANZA, Marcos. **Newton**. Paris: Belles Lettres, 2003.

PANZA, Marco. Das velocidades às fluxões. **Scientiæ Zudia**, São Paulo, v.8, n.4, p. 509-546, 2010.

MACLAURIN, Colin. **A Treatise of Fluxions**. In Two Books. Edinburgh: Printed by T.W. and T. Ruddimans, 1742.

MACLAURIN, Colin. **Exposition des découvertes philosophiques de M. le Chevalier Newton.** Paris: Dussant et Pissot, trad. Lavirotte, 1749a.

MACLAURIN, Colin. **Traité des Fluxions, Paris**: Jombert, trad. P. Pézénas. Paris: Dussant et Pissot, trad. Lavirotte, 1749b.

MENDES, Iran Abreu; SOARES, Evanildo Costa. Uma história das fluxões fluxões às derivadas na Obra de Colin MacLaurin. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Vol. 22, nº 45, p.82–105, 2022.

SILVA, Maria Deusa Ferreira da**. Problemas e modelos que contribuíram com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral:** dos gregos a Newton. 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, Natal, 2010.