A CONSTRUÇÃO DA GEOMETRIA RACIONAL

Jansley Alves Chaves[1]

Gérard Émile Grimberg [2]

Leandro Silva Dias [3]

RESUMO

A Geometria apresentada no Tratado de Poncelet de 1822 é o que alguns autores irão denominar de Análise Algébrica das figuras ou Análise Geométrica. Nosso objetivo é apresentar como alguns geômetras do início do séc. XIX desenvolveram os processos dessa Geometria. A Análise Algébrica e a Análise Geométrica são, entre outras, duas formas de abordagem de um problema em Geometria. No despertar do século XIX a Geometria tinha como abordagem principal a Análise, denominada como Análise Algébrica. Portanto, é de se suspeitar que a Análise algébrica das figuras não tenha tido de imediato um impacto no Ensino. Entretanto, a Análise algébrica das figuras, que esteve menos em evidência após o trabalho de Descartes até o fim do séc. XVIII, encontra, após a Revolução, um certo vigor no ensino, em particular sob o impulso decisivo de Monge. No início do sec. XIX surgem novos resultados tais como Transversais, Polo, Polar, Eixo radical, Ponto ideal, Similitude, etc, resultados que serão divulgados, principalmente, através de alguns periódicos como *Journal de l'École polytechnique*, *Correspondance sur l'école Polytechnique*, e os *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, por alguns geômetras entre eles: Carnot, Monge, Servois, Brianchon, Poncelet, Gergonne, etc. Esses novos resultados serão denominados por Poncelet de Geometria Racional.

Palavras-chave: Análise Algébrica, Análise Geométrica, Geometria Racional, Geometria Projetiva.

INTRODUÇÃO

O despertar do sec. XIX tem como abordagem principal em Geometria a Análise Algébrica. Alguns autores de obras, que possuem certo vínculo com a *École Polytechnique* ou ex-alunos, ou professores, e, portanto, seguirem ou conviverem com as lições de Monge, constituem a chamada Escola de Monge. Gaspard Monge (1746-1818) é a principal figura da educação na França pós Revolução, ele participou na criação da *École polytechnique* que tem seu início em 1794. Hachette e Lagrange, dois professores da *École polytechnique*, publicaram seus livros com

1 Doutorando PEMAT-UFRJ. E-mail: chavesrizo@gmail.com

2 Docente da UFRJ. E-mail: gerard.emile@terra.com.br

3 Doutorando PEMAT-UFRJ. E-mail: leandrosilvadias123@hotmail.com

objetivo claro de preparar candidatos à *École Polytechnique*. Aliás, os trabalhos publicados neste primeiro terço do século XIX sobre a aplicação da álgebra à geometria destinam-se aos candidatos à *École polytechnique*. A aplicação da álgebra à geometria para estabelecer as propriedades de curvas e superfícies de segunda ordem é, desde o início do séc. XIX, uma parte bem identificada e independente do ensino da matemática, destinada em particular aos candidatos à *École polytechnique*, que exigia tal conhecimento em seu exame de admissão.

Neste trabalho temos como objetivo apresentar como alguns geômetras do início do séc. XIX desenvolveram os processos da Geometria Algébrica das figuras, ou seja, de uma Geometria Sintética contrapondo o que era prática matemática da época, ou seja, a aplicação de uma Geometria Algébrica ou Geometria Analítica.

GEOMETRIA ANALÍTICA X GEOMETRIA SINTÉTICA

É importante diferenciar o que nós entendemos, hoje em dia, por Geometria Analítica e Geometria Sintética. A expressão Geometria Analítica foi proposta por Lacroix na introdução ao seu Tratado sobre cálculo diferencial e integral de 1797.

Segundo Lacroix:

> Ao descartar cuidadosamente todas as construções geométricas, eu queria fazer o leitor sentir que existia uma maneira de considerar a Geometria, que poderia ser chamada de Geometria Analítica, e que consistiria em deduzir as propriedades da extensão do menor número possível de princípios, como Lagrange fez em sua Mecânica com relação às propriedades de equilíbrio e movimento (LACROIX, 1797, p. XXV, tradução nossa)

Por oposição a esse método de abordagem temos a Geometria Sintética, ou Análise Geométrica ou Análise Algébrica das figuras ou Geometria de Construção. Essa Geometria que advém dos antigos foi de certa forma reavivada com os geômetras do início do séc. XIX ao apresentarem uma série de procedimentos e teorias que, mais tarde, ficou conhecida por Geometria Projetiva, e terá no Tratado de Poncelet o que observa o historiador: “verdadeiro ponto de partida para esta reconstrução do edifício geométrico que o séc. XIX alcançaria de forma tão notável” (TATON, 1951, p. 2).

A Análise Algébrica é, nas publicações voltadas aos concursos das grandes escolas, sobretudo à *École Polytechnique*, a abordagem principal. Chamaremos, seguindo o exemplo de Poncelet e Chasles, “análise algébrica” qualquer procedimento que consista em usar a álgebra de equações em geometria.

Alguns autores irão publicar sobre o assunto exclusivamente aos candidatos. Um desses autores é Jean-Baptiste Biot, que em 1805 publicou *Essai de Géométrie Analytique*. O autor escolhe o método das coordenadas opondo-se ao método da análise algébrica das figuras. A importância dessa escolha para ele justifica o título inovador de Geometria Analítica que dá ao seu trabalho.

Segundo Biot:

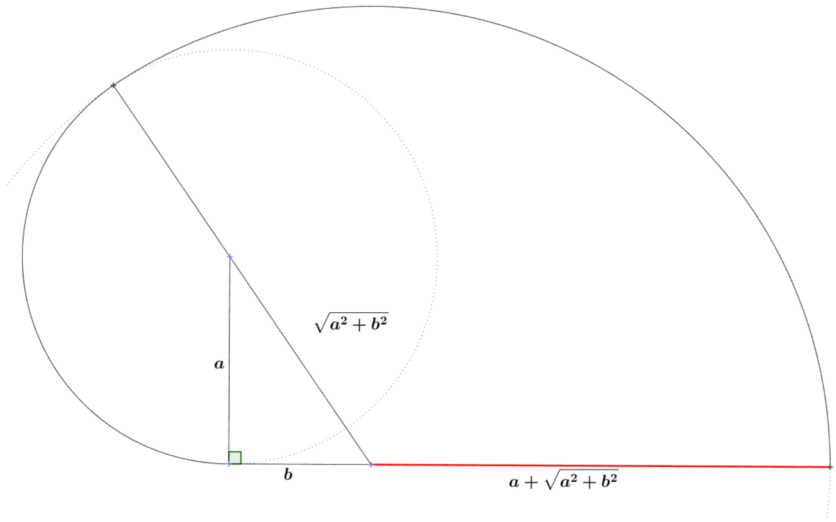
> Por esta denominação quero dizer a maneira de aplicar a álgebra à geometria, não por meio de construções particulares, que devem ser variadas para todos os casos, mas empregando os métodos gerais que MM. Lagrange e Monge foram os primeiros a dar a conhecer nas suas obras; métodos ensinados desde então por M. Monge na *École Polytechnique*, e tão felizmente introduzidos por M. Lacroix em seus tratados; que é um dos serviços mais importantes já prestados à educação. (BIOT, 1813, prefácio, tradução nossa)

As obras que Biot (Biot,1813)[4] menciona são certamente a Aplicação da Álgebra à Geometria de Monge e a Mecânica Analítica de Lagrange. O trabalho de Biot (Biot, 1813) começa com a resolução de um problema sobre a divisão de um segmento em média e extrema razão. Este primeiro problema é resolvido pelo que chamamos de análise algébrica de figuras, a fim de dar ao leitor um primeiro vislumbre do que é a aplicação da álgebra à geometria.

Suponha que tenhamos $\boldsymbol{x^2 - 2ax = b^2}$. Resolvendo esta equação em relação ao $\boldsymbol{x}$, encontramos: $\boldsymbol{x = a + \sqrt{a^2 + b^2}}$ e $\boldsymbol{x = a - \sqrt{a^2 + b^2}}$ (Figura 1). As expressões dentro dos radicais podem ser resolvidas por triângulos retângulos. Entretanto, a expressaõ $\boldsymbol{x = a - \sqrt{a^2 + b^2}}$ não é possível de ser construída pois $\boldsymbol{a < \sqrt{a^2 + b^2}}$.

Figura 1: Resolução da expressão $\boldsymbol{x^2 - 2ax = b^2}$

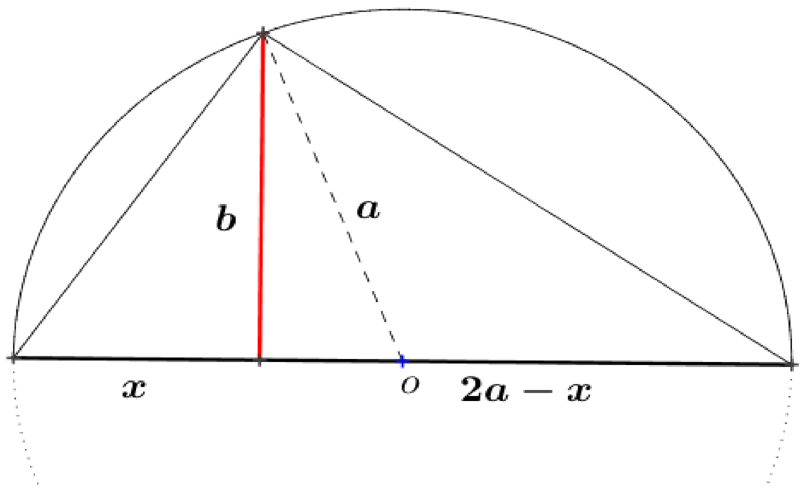
4 Embora o livro tenha sido publicado em 1805, analisamos a 5ª edição publicada em 1813.



Fonte: Elaborada pelos autores

Mas, a equação poderia ser escrita da seguinte forma: $\boldsymbol{x(2a-x)=b^2}$(Figura 2). E teríamos, portanto, uma média geométrica onde uma circunferência de raio $\boldsymbol{a}$ circunscreve um triângulo retângulo cuja a altura relativa à hipotenusa mede $\boldsymbol{b}$ e hipotenusa $\boldsymbol{2a}$.

Figura 2: Media geométrica $\boldsymbol{x(2a-x)=b^2}$



Fonte: Elaborada pelos autores

Ao resolver o problema de forma algébrica ele conclui:

> As construções geométricas devem ser consideradas apenas como um meio às vezes elegante de representar as soluções de

> problemas, e não como um procedimento rigoroso para encontrar seus valores numéricos. (BIOT, 1813, p. vj, tradução nossa).

Como Lacroix, ele dissocia a resolução do problema da construção geométrica da figura. Inegavelmente, a obra de Lacroix será um modelo e uma referência. A aplicação da álgebra à geometria é agora considerada um ramo da matemática por direito próprio.

Assim, o despertar do séc. XIX tem como abordagem principal em Geometria a Análise, ou seja, o que podemos denominar em nosso trabalho de Geometria Analítica.

ASCENSÃO DA ANÁLISE GEOMÉTRICA

A Análise Geométrica, ou seja, que consistem em um raciocínio sobre noções próprias da geometria e sem recorrer às equações da álgebra, estiveram menos em evidência após o trabalho de René Descartes (1596 – 1650) até o fim do séc. XVIII, mas, encontram, após a Revolução, um certo vigor no ensino, em particular sob o impulso decisivo de Gaspard Monge (1746-1818) e o ensino de sua Geometria Descritiva. Seguindo-o, outros geômetras estabeleceram novos resultados por métodos geométricos, em alguns casos superando a análise algébrica. Para isso, inventam novas noções como transversais, pólos e polares, eixos radicais, retas ideais ou imaginárias. Esses resultados são divulgados através dos trabalhos de Monge, Servois (1768-1847), Carnot (1753-1823) e Poncelet (1788-1867), entre outros. Em publicações como o J*ournal de l'École polytechnique*, a *Correspondance sur l'école Polytechnique* e os *Annales de Mathématiques pures et appliquées*.

Poncelet irá designar todas essas iniciativas, que renovam e atualizam a geometria, de *Géométrie rationnelle*. Em seu Tratado de 1822, constrói uma alternativa essencialmente mais geométrica do que o "método das coordenadas", ou seja, podemos dizer que seu trabalho é predominantemente de uma Geometria Sintética em oposição a uma Geometria Analítica, por meio de novas concepções de processos geométricos e um recurso sistemático à projeção.

Vamos especificar as contribuições dessa geometria racional, no início do séc. XIX, pelo estudo da *Géométrie Descriptive* de Gaspard Monge, a *Géométrie* *de position* de Lazare Carnot, as *Solutions peu connues* de Joseph Servois e sobretudo o *Traité des propriétés projectives des figures* de Jean-Victor Poncelet.

Em um segundo momento, buscaremos a presença dessa geometria racional no ensino. Antecipadamente, podemos dizer que a encontramos menos no ensino clássico do ensino médio e superior e mais na educação industrial, onde os trabalhos de ensino de geometria de Claude Lucien Bergery em 1826 e de Étienne Bobillier em 1837 incorporam muitos elementos. Isso nos indica a grande praticidade de tal Geometria, cuja aplicação direta é na Mecânica. Assim, não é coincidência Poncelet ter recebido um prêmio da *Academie de Sciences* de Paris pelo desenvolvimento de turbinas hidráulicas e posteriormente ter ocupado a cadeira de Mecânica da *Academie*.

Vamos analisar as obras do período anterior a 1822, para que possamos ilustrar os novos conceitos introduzidos na geometria no primeiro quarto do século XIX. Escritos por geômetras, que são figuras emblemáticas desta nova geometria, mostram novas abordagens e suas aplicações na resolução de problemas.

A GEOMETRIA DESCRITIVA DE MONGE (1799)

O curso de Gaspard Monge foi publicado, primeiro no *Journal de l'École polytechnique*, depois em obra própria. Esta teoria possui um grande apelo aos artesãos, descrevendo os processos que permitem representar em dois planos perpendiculares as projeções das figuras do espaço, também oferece um meio de descobrir e demonstrar certas propriedades dessas figuras. Os raciocínios empregados na geometria descritiva são geométricos no sentido de que são ditados pela visualização da figura e pelos movimentos de suas partes no espaço. Esses raciocínios são baseados nas proposições da geometria elementar e não recorrem à álgebra. Portanto, não há métrica neste processo.

A difusão das ideias de Monge foi assegurada pelos seus numerosos trabalhos de ensino, primeiro na *École du génie de Mézières*, depois na *École Normale* e sobretudo na *École Polytechnique*, onde a geometria descritiva será leccionada ao longo do séc. XIX.

O objetivo da Geometria Descritiva é possibilitar cálculos esteriométricos através de cálculos planimétricos. São duas projeções cilíndricas (sistema biprojetivo) do objeto tridimensional em dois planos perpendiculares, um dos quais é rebatido sobre o plano do outro.

O livro de Monge se constitui em uma série de tais questões, baseadas em construir as projeções planas de certos arranjos de figuras no espaço, ou seja, uma lista organizada de problemas de construções com régua e compasso. A sua resolução envolve um raciocínio geométrico que exige uma grande capacidade de visualização da figura, que o leitor não possui à sua frente, devido à sua tridimensionalidade.

Monge escolhe um modo de exposição de sua geometria descritiva como respostas sucessivas a perguntas, que são sobre construções com régua e compasso. Esta organização confere um lugar primordial à resolução de problemas de construção.

Sem privilegiar uma em relação à outra, o autor defende a complementaridade das duas abordagens, e a citação continua da seguinte forma:

> Não é sem objeto que aqui comparamos a geometria descritiva com a álgebra; essas duas ciências têm as relações mais íntimas. Não há descrição de geometria descritiva que não possa ser traduzida em análise; e quando as questões não incluem mais de três incógnitas, cada operação analítica pode ser considerada como a escrita de uma em geometria (MONGE, 1809, p. 16, tradução nossa).

Assim, respondendo à pergunta: "Desenhe um plano tangente ao mesmo tempo a três esferas dadas de dimensões e posição?" (MONGE, 1809, p. 53.), Monge prova que, dados três círculos em um plano, os três pontos de interseção das duas tangentes externas a dois desses círculos são colineares. A demonstração é obtida da seguinte maneira:

Considere a seção das três esferas pelo plano de seus três centros, isso é possível, pois existe um único plano definido pelos três centros. Agora, um plano tangente às três esferas também é tangente aos três cones tangentes duas a duas as esferas e, portanto, contém os três vértices desses cones que estão na interseção dos dois planos tangentes às três esferas. Assim, a reta de intersecção dos dois planos tangentes contém os três vértices, ou seja, estes pontos são colineares.

INSUFICIÊNCIAS DA ANÁLISE ALGÉBRICA POR CARNOT

Em *Géométrie de position*, Carnot destaca certas deficiências da análise algébrica. Ela opera um trabalho algébrico sobre as equações desvinculadas de qualquer sentido geométrico, opera sobre “seres de razão” cuja existência não é tangível, a saber, quantidades negativas e quantidades imaginárias. Se Carnot reconhece a imensa eficácia da análise, cujos resultados foram confirmados pela prática, ele mostra em vários exemplos muito simples como isso leva a inconsistências; aqui ela introduz soluções estranhas, ali certas soluções reais lhe escapam.

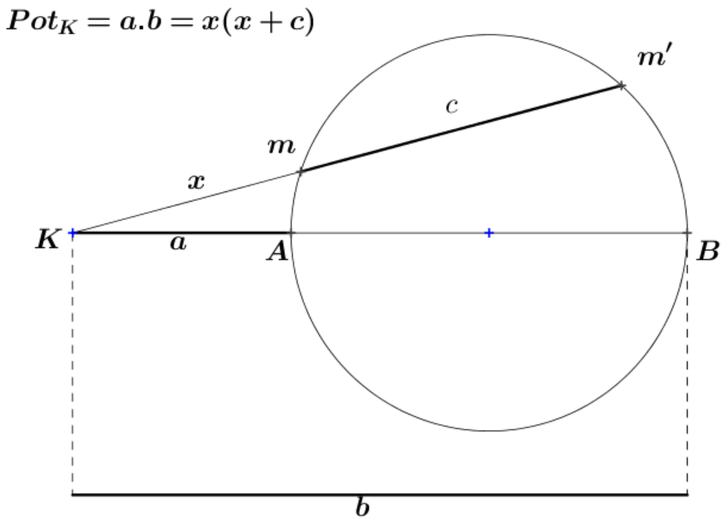
Não questiona o uso da álgebra como escrita abreviada do raciocínio, desde que esses escritos representem objetos reais. Ele quer "justificar esse uso feito pela análise de quantidades absurdas em si mesmas", restabelecendo uma "cadeia de verdades sensíveis" seguindo a "cadeia de verdades hieroglíficas" (CARNOT,1803, p. 12.) da análise, da qual apenas o valor heurístico é reconhecido.

No que diz respeito às quantidades negativas, Carnot rejeita as duas interpretações que, segundo ele, receberam. A primeira é que uma quantidade negativa é menor que zero. O argumento se baseia na proporção $\frac{\mathbf{1}}{-\mathbf{1}} = \frac{-\mathbf{1}}{\mathbf{1}}$

> Se a noção contestada fosse exata, isto é, se -1 fosse menor que 0, com mais razão seria menor que 1; portanto, o segundo termo dessa proporção seria menor que o primeiro; portanto, o quarto deve ser menor que o terceiro; ou seja, 1 deve ser menor que $-\mathbf{1}$; portanto $-\mathbf{1}$ seria menor e maior que $\mathbf{1}$; o que é contraditório. (CARNOT, 1803, p. vj – vij, tradução nossa)

A segunda interpretação possível de quantidades negativas é que elas são tomadas no sentido oposto das positivas. Carnot contradiz essa interpretação apresentando o exemplo da figura 3. Trata-se de traçar uma reta secante à um círculo, de um ponto K dado, de tal forma que a corda determinada no círculo seja de medida c dada (CARNOT, 1803, p. vij).

Figura 3: Contradição na simetria de números negativos e positivos.



Fonte: Elaborada pelos autores

O segmento $\boldsymbol{AB}$ designando o diâmetro da circunferência de círculo que, prolongado, passa por $\boldsymbol{K}$, ele define $\boldsymbol{KA} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{KB} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{mm'} = \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{Km} = \boldsymbol{x}$, e termina com a equação $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{x})$ cuja resolução por álgebra fornece dois valores para $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} = \frac{-\boldsymbol{c} \pm \sqrt{\boldsymbol{c}^2 + \boldsymbol{ab}}}{\boldsymbol{2}}$$

Esses dois valores um positivo e outro negativo, são iguais, em valor absoluto, aos dois comprimentos $\boldsymbol{Km}$ e $\boldsymbol{Km'}$. Carnot observa que as duas raízes da equação, embora sejam uma positiva e a outra negativa, ambas devem ser tomadas na mesma direção em relação ao ponto fixo $\boldsymbol{K}$. Assim, a ideia segundo a qual quantidades negativas devem ser tomadas no sentido oposto de positivo é desqualificada. Carnot multiplica exemplos desse tipo para convencer o leitor da "contradição em que caem aqueles que sustentam a existência real de quantidades negativas".

AS SOLUÇÕES POUCO CONHECIDAS DE SERVOIS (1805)

François Joseph Servois (1768-1847) foi notado por Legendre e designado em 1801 para o ensino de matemática nas Escolas de Artilharia em Besançon, depois muito rapidamente em Châlons-sur-Marne e Metz. Foi neste período que escreveu o *Solutions peu connues de différents problèmes de Géométrie pratique*. Obra dividida entre uma parte teórica, que apresenta propostas relativamente novas para a geometria das figuras, e uma parte contendo dezesseis problemas de construção, que aplicam as teorias anteriores.

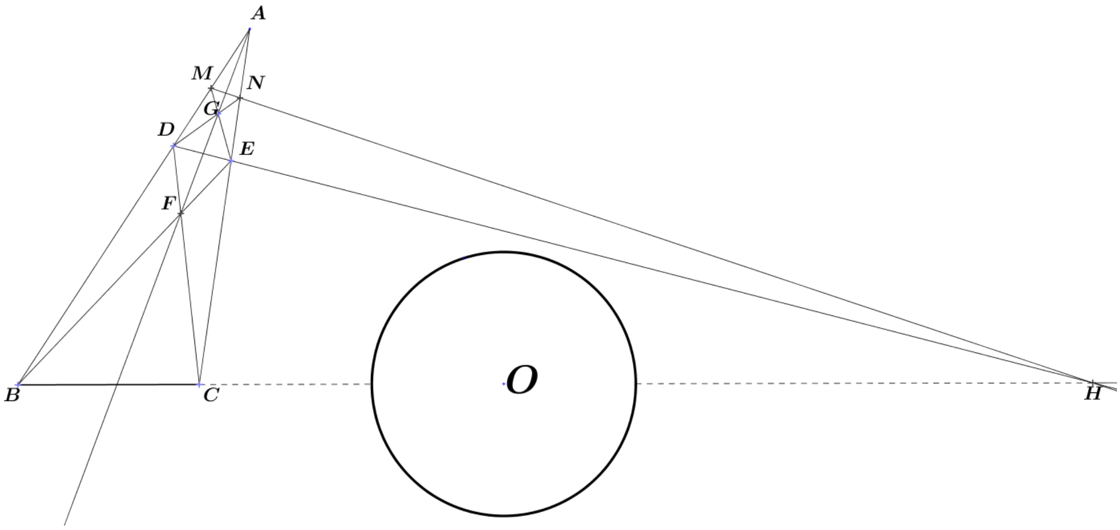
A originalidade do trabalho de Servois reside no fato das exigências das manobras no campo militar, utilizarem apenas dois instrumentos para as construções, nomeadamente as estacas e a corda, respectivamente para efetuar alinhamentos e reportar comprimentos. No papel, consiste em fazer construções utilizando apenas a régua e, quando necessário, reportar comprimentos. Servois cita como fontes os trabalhos de Lorenzo Mascheroni, Carnot, Monge.

Vejamos como determinar as entradas da construção de um túnel de tal forma que estejam alinhados com a estrada, ou seja, a estrada termina em um ponto da montanha e desejo saber o ponto de saída para manter o alinhamento e, também, para iniciar a escavação pelos dois lados simultaneamente:

> $\boldsymbol{BC}$ são dois pontos na estrada cuja extensão procuramos: em um ponto $\boldsymbol{A}$, fora da reta, e de onde podemos ver $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$, coloque uma “estaca”. Coloque no segmento $\boldsymbol{AB}$ uma "estaca" $\boldsymbol{D}$, depois uma terceira "estaca", $\boldsymbol{E}$, em $\boldsymbol{AC}$, de modo que o alinhamento $\boldsymbol{DE}$ passe sobre o obstáculo $\boldsymbol{O}$ que oculta a estrada definida pelos pontos $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$. Coloque uma quarta “estaca” $\boldsymbol{F}$, interseção dos dois alinhamentos $\boldsymbol{BE}$, $\boldsymbol{CD}$. Coloque uma quinta “estaca” $\boldsymbol{G}$ sobre $\boldsymbol{AF}$, depois uma sexta $\boldsymbol{M}$ em $\boldsymbol{BG}$ e $\boldsymbol{AB}$, depois uma sétima $\boldsymbol{N}$ em $\boldsymbol{DG}$ e $\boldsymbol{AC}$, finalmente, coloque uma oitava, $\boldsymbol{H}$, em conjunto com os dois alinhamentos $\boldsymbol{DE}$ e $\boldsymbol{MN}$. Esta última "estaca" estará na extensão de $\boldsymbol{BC}$ (SERVOIS, 1805, p. 31, tradução nossa).

A justificativa desta construção é deduzida da concorrência das retas $\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{DE}$ e $\boldsymbol{MN}$ no ponto $\boldsymbol{H}$.

Figura 4: Determinação do ponto H.



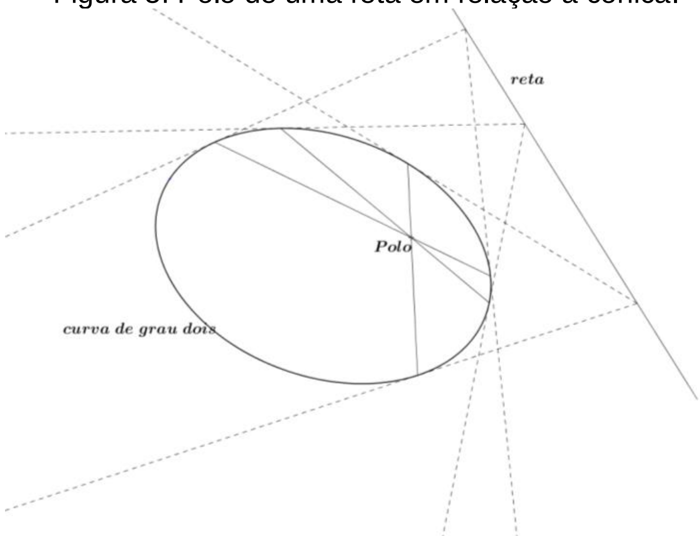
Fonte: Elaborada pelos autores

Ele irá introduzir a ideia de pólo de uma reta em relação a uma cônica no primeiro volume dos *Annales de mathématiques pures et appliquées*:

> Atribuindo-se uma reta e uma curva de segunda ordem, chamo pólo da reta o ponto [...] em torno do qual giram todas as cordas dos pontos de contato dos pares de tangentes à curva dos diferentes pontos da reta (SERVOIS, 1810-1811, p. 337-341, tradução nossa).

Aqui Servois está nomeando um ente geométrico que já era conhecido por outros geômetras. Vejamos a identificação na figura 5.

Figura 5: Pólo de uma reta em relação à cônica.



Fonte: Elaborada pelos autores

AS PROPRIEDADES PROJETIVAS DAS FIGURAS DE PONCELET (1822)

Jean-Victor Poncelet (1788-1867), politécnico e militar, registra em seu *Traité des propriétés projectives des figures* de 1822 os resultados de suas pesquisas realizadas enquanto estava cativo em Saratoff após a campanha da Rússia. Ao retornar à França, após o acordo de paz em 1814, faz carreira como professor de mecânica na Escola de Artilharia e Engenharia de Metz, posteriormente, já em Paris, na Faculdade de Ciências de Paris.

Observem que, como já citado anteriormente, Poncelet denomina de Geometria Racional os processos desenvolvidos por ele em seu trabalho e que consiste em uma geometria da qual a Mecânica se apropria. Não por coincidência, Poncelet será instrutor de mecânica na Escola de aplicação de Metz, depois ocupará a cadeira de mecânica na Academia de ciências de Paris e mais tarde será professor na Sorbonne, exatamente na aplicabilidade da geometria à mecânica.

No Tratado, ele quer tornar a geometria "[...]independente da análise algébrica" (PONCELET, 1822, Introdução, p. xix). Não porque considere que a primeira tenha alguma vantagem sobre a segunda, mas porque "cada uma dessas duas ciências tem meios específicos e não poderia, sem grande prejuízo para o avanço da ciência, cultivar uma sem a outra” (PONCELET,1817-1818, p. 143.). Ele descreve as vantagens que a análise algébrica possui em comparação com a geometria racional:

> Enquanto a geometria analítica oferece, por seu próprio curso, meios gerais e uniformes para proceder à solução das questões que surgem, à busca das propriedades das figuras; enquanto ela chega a resultados cuja generalidade é sem limites, a outra [geometria racional] procede por acaso; seu progresso depende inteiramente da sagacidade de quem o emprega, e seus resultados são quase sempre limitados ao estado particular da figura em questão. Através dos esforços sucessivos dos geômetras, verdades particulares se multiplicaram sem cessar, mas raramente aconteceu que o método e a teoria geral tenham ganhado com isso. (PONCELET, 1822, p. xix, tradução nossa).

À questão de saber o que constitui o “poder da análise algébrica” (PONCELET, 1822, p. xx), Poncelet responde que a generalidade dos resultados desta última é consequência do uso que ela faz de “características que não têm valor por si mesmas”, esses “seres de razão, que parecem prerrogativa exclusiva da Álgebra”. Ao contrário de Carnot, que rejeita sua validade nas provas, Poncelet quer construir noções que teriam um papel equivalente em geometria ao de “seres de razão” em álgebra:

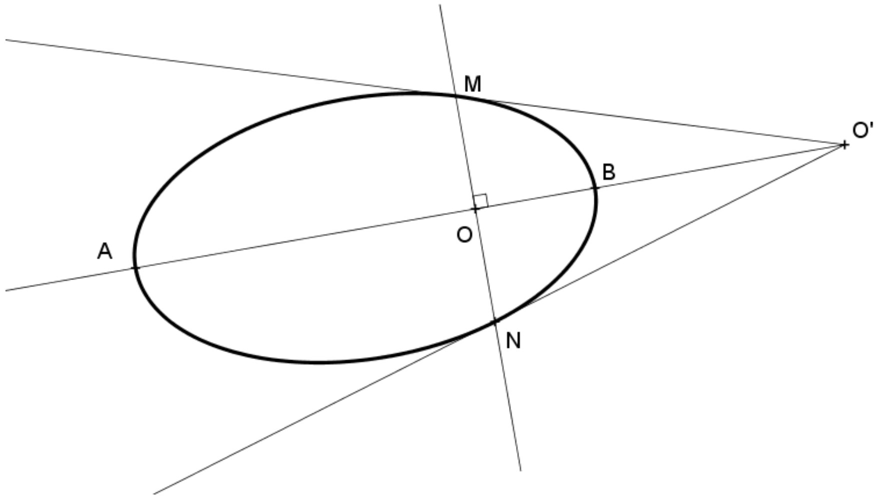
> Se fosse possível aplicar-lhe o raciocínio implícito, desconsiderando a figura [...], a Geometria ordinária, sem por isso empregar os cálculos e os sinais da Álgebra, provaria, em muitos aspectos, rival da Geometria Analítica (PONCELET, 1822, p. xxii, tradução nossa).

Esse raciocínio implícito se aplica a noções como pontos no infinito, bem como às novas noções de elementos ideais e imaginários na figura. Por exemplo, Poncelet apresenta uma curva de segunda ordem $\boldsymbol{C}$ com uma secante $\boldsymbol{MN}$ e seu diâmetro conjugado $\boldsymbol{AB}$ (lugar geométrico dos pontos médios das cordas de mesma direção). Então o diâmetro $\boldsymbol{AB}$ intersecta a corda $\boldsymbol{MN}$ em seu ponto medio $\boldsymbol{O}$, as tangentes à curva em $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{N}$ se encontram em um ponto $\boldsymbol{O'}$ do diâmetro, e $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{O'}$ são conjugados em relação a $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, ou seja, temos a proporção$\boldsymbol{AO.AO'} = \boldsymbol{BO.BO'}$. Essa última relação o leva a perceber que os pontos $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{O'}$ podem ser definidos mesmo quando a reta $\boldsymbol{MN}$ não intersecta a curva $\boldsymbol{C}$. Neste caso, essa reta é chamada de secante ideal, e seus pontos de intersecção com a curva são ditos imaginários. A eficácia dessas noções é garantida pelo princípio da continuidade, cuja afirmação é:

> Consideremos qualquer figura, em uma posição geral e de algum modo indeterminada, entre todas as que ela pode assumir sem violar as leis, as condições, a conexão que subsiste entre as várias partes do sistema[...] não é óbvio que as propriedades e as relações, encontradas para o primeiro sistema, permanecerão aplicáveis aos estados sucessivos deste sistema, desde que se levem em conta as modificações particulares que poderão ocorrer lá, como quando certas grandezas terão desaparecido, terão mudado de significado ou de sinal, etc., modificações que sempre serão fáceis de reconhecer a priori, e por regras seguras (PONCELET,1822, p. xxii, tradução nossa) ?

Poncelet apresenta os pontos A, B, O, O' , na figura 6, distribuídos harmonicamente, de tal forma que A, B é conjugado harmônico de O, O'.

Figura 6: $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{OO'}$ são conjugados harmônicos



Fonte: Elaborada pelos autores

Dotada de tais meios gerais, a geometria ainda precisa de um “método direto e uniforme” que encontra no método das projeções:

> Dois meios gerais, igualmente poderosos, se apresentam para aperfeiçoar a geometria racional: um que consiste em estender o objeto das concepções desta Geometria por meio do princípio da continuidade, o outro que põe em uso os princípios da doutrina das projeções para proceder, por um caminhar rápido e livre de hesitações, na busca de verdades geométricas (PONCELET, 1822, p. xxji, tradução nossa).

A doutrina das projeções geométricas supõe a distinção das propriedades das figuras que subsistem pela projeção, que Poncelet designa sob o nome de “propriedades projetivas”, e que dão origem a um método de demonstração:

> Querendo estabelecer um [...] em uma dada figura, basta mostrar que ela vale para qualquer uma de suas projeções. Ora, entre todas as projeções possíveis desta figura, podem existir algumas que se reduzem a circunstâncias mais simples, e sobre as quais a demonstração ou a pesquisa que se propõe se torna de primeira facilidade (PONCELET, 1822, p. 51, tradução nossa).

A projeção considerada é quase sempre cônica ou central. Ela "obviamente não muda nem a correlação, nem o grau ou ordem da figura primitiva, nem, em geral, qualquer tipo de dependência gráfica entre as partes dessa figura, que se referiria apenas à direção indefinida das retas, sua intersecção mútua, seus contatos etc (PONCELET, 1822, p. 4.). Essas primeiras propriedades projetivas são chamadas de “disposição ou gráficas”.

Vejamos como Poncelet procede no exemplo da busca das propriedades de quadriláteros inscritos e circunscritos a uma cônica. Ele provou que a figura formada por uma cônica e uma reta, quaisquer que sejam, pode ser considerada a projeção de um círculo e a reta do infinito. Ele aplica esse princípio à cônica dada e à reta que une os pontos de encontro dos lados opostos do quadrilátero inscrito. O quadrilátero inscrito no círculo tem lados opostos que se encontram no infinito, ou seja, paralelos, portanto é um retângulo, e o quadrilátero circunscrito é um losango.

Desta forma expõe Poncelet em seu Tratado:

> Se inscrevermos, em uma seção cônica, qualquer quadrilátero ABCD, e se circunscrevermos a ele outro abcd, cujos lados tocam a curva nos vértices do primeiro,
>
> 1. As quatro diagonais desses dois quadriláteros se cruzarão no mesmo ponto P.
>
> 2. Os pontos de interseção, L e M, l e m, dos lados opostos do quadrilátero inscrito e do quadrilátero circunscrito, serão todos os quatro dispostos na mesma reta polar de P (PONCELET, 1822, p. 10, tradução nossa).

Na figura 6, mais simples (primitiva), observa-se que as quatro diagonais dos dois quadriláteros são concorrentes, ou que os lados opostos dos dois quadriláteros são paralelos, ou seja, concorrentes em um ponto da reta no infinito. Sendo essas propriedades projetivas, elas permanecem verdadeiras na figura 7 (transformada).

Figura 6: Primitiva

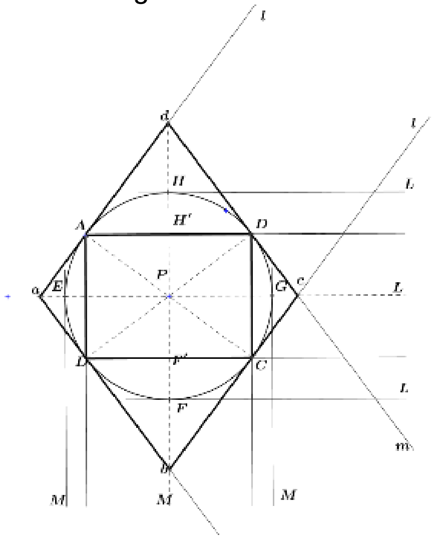
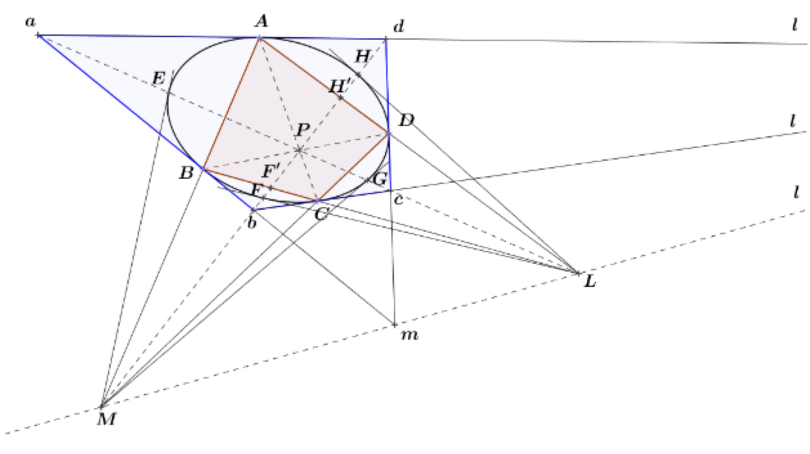


Figura 7: Transformada



Fonte: Elaborada pelos autores

A extensão das concepções geométricas, aqui pelo uso de pontos no infinito, aliada ao uso de uma projeção adequada, permitem a Poncelet demonstrar as propriedades da figura. Além das propriedades gráficas de colinearidade, contato, interseção, etc., Poncelet também procura propriedades métricas que sejam projetivas.

CONCLUSÃO

No primeiro terço do século XIX surgiu um interesse renovado pelos métodos geométricos, que foram intensificados e acompanhados pela introdução de novas noções.

Monge, com a Geometria Descritiva, declina sobre problemas de construção geométrica que estimulam a visualização da figura e dão origem a um método de invenção.

Carnot, na Geometria da Posição, estabelece, em resposta ao que chama de "problemas gerais", muitas relações entre as partes das figuras, concebidas como conjuntos móveis de retas. Esses relacionamentos se mostraram frutíferos na resolução de problemas.

Servois, nas Soluções Pouco Conhecidas, aprofunda certas proposições da obra de Carnot e delas extrai as soluções de uma série de problemas na geometria da régua.

Por fim, Poncelet, em seu Tratado sobre as propriedades projetivas das figuras, estende as concepções da geometria aos pontos no infinito e aos elementos ideais e imaginários, e institui um frutífero método de invenção através do uso da projeção cônica. Para isso, busca sistematicamente as propriedades das figuras preservadas por projeção, as propriedades "projetivas".

Assim, observamos que, há entre alguns Matemáticos no início do séc. XIX, uma busca por retomar a visualização da figura em Geometria. Essas novas noções, que esses geômetras apresentam, darão à Geometria Sintética um impulso que a tornará um método tão forte quanto à Geometria Analítica.

REFERÊNCIAS

BIOT, J-B. **Essai de Géométrie Analytique, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre**, 5e édition, Paris : Klostermann, 1813.

BRIANCHON, C. Solution de plusieurs problèmes de géométrie, **Journal de l'École polytechnique**, 10e cahier, tome IV, Paris, 1810.

CARNOT, L. **Géométrie de position**, Paris : Duprat, 1803.

LACROIX, S.F. **Traité du calcul différentiel et du calcul intégral**, Paris : Duprat, 1797.

MONGE, G. **Application de l'Analyse à la géométrie**, Paris : Bernard, 1809.

PONCELET, J-V. « Réflexions sur l'usage de l'analise algébrique dans la géométrie ; suivies de la solution de quelques problèmes dépendant de la géométrie de la règle », in Gergonne, **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 8, 1817-1818, p. 143.

PONCELET, J, V. **Traité des propriétés projectives des figures**, Paris : Bachelier,1822.

SERVOIS, F, J. **Solutions peu connues de différens problèmes de géométrie-pratique**. Devilly; Paris: Courcier, 1805.

TATON, R. **La géométrie projective en France de Desargues à Poncelet. In : conférence faite au palais de la découverte**. Paris : Anais de l'Université de Paris. 1951.