DAS EXTREMIDADES, ENCONTRAR O CENTRO:
o triângulo aritmético e o papel das proporções para Pascal

João F. N. B. Cortese[1]

RESUMO

O *Tratado do triângulo aritmético* (1654/1665), de Blaise Pascal (1623-1662), já foi muito estudado na história da matemática. Um dos principais motivos pelo qual tal obra é célebre é que se encontra nela um uso, fundamental na história da matemática (ainda que não o primeiro), do princípio de indução matemática. Nossa objetivo aqui é explorar um aspecto específico de tal triângulo na abordagem de Pascal, muito menos discutido: a relação entre as extremidades de cada uma das bases do triângulo e o centro desta, através de uma abordagem pelas proporções. Tal trabalho se insere na perspectiva de analisar o modo de articulação do próprio autor ao encontrar alguns dos resultados deste célebre tratado. Ele também possibilita revelar temas que podem ser relacionados a outras partes da obra matemática de Pascal, em particular as *Cartas de A. Dettonville* (1658/1659), que lidam com um método dos indivisíveis a partir de uma reformulação da Lei da alavanca arquimediana, uma "balança" sendo usada para avaliar grandezas e seus centros de gravidade. Em ambos os casos, a determinação de um centro em relação às extremidades revela-se importante para Pascal. O trabalho realizado aqui segue o texto no seu original (em francês e em latim, correspondentes às duas versões do *Tratado do triângulo aritmético*), dando particular expressão à linguagem empregada, assim como dialoga com a bibliografia recente acerca das obras matemáticas de Pascal.

Palavras-chave: Blaise Pascal. Proporções. *Tratado do triângulo aritmético*. História da Matemática. Matemática do século XVII.

INTRODUÇÃO: Um triângulo aritmético

> A natureza se imita. Um grão lançado em boa terra produz. Um princípio lançado em um bom espírito produz.
>
> Os números, que são de natureza tão diferente, imitam o espaço.
>
> Tudo é feito e conduzido por um mesmo mestre.

[1] Docente do Instituto de Biociências da USP e pesquisador associado ao Laboratório SPHERE (CNRS e Université Paris Cité). joao.cortese@usp.br.

> A raiz, os galhos, os frutos, os princípios, as consequências. (PASCAL, 2005 - *Pensamentos*, fragmento Lafuma 698, Sellier 577)

As matemáticas pascalianas têm como ponto importante a consideração do triângulo frequentemente chamado de “Triângulo de Pascal”. Trata-se de um triângulo *aritmético*, característica que vem dos números figurados (tais como os números triangulares ou quadrados), e que permite ver a importante relação entre aritmética e geometria que aparece na obra de Blaise Pascal (1623-1662).

Tal triângulo nos interessará aqui, em particular, no que diz respeito à *simetria* que possui. Isso permite ver uma reciprocidade entre as células, e encontrar o *centro* de uma base a partir de suas extremidades. Além disso, as relações entre as células são expressas por uma linguagem de proporções, e o triângulo aritmético pode ser aproximado do modelo da balança que Pascal usa no método dos indivisíveis das *Cartas de A. Dettonville* (1658/1659): a relação entre aritmética e geometria não se limita a um paralelo entre esses objetos que são os números e as grandezas, mas a própria geração do modelo da balança de Dettonville para medir grandezas e encontrar centros de gravidade pode ser vista em relação àquela do triângulo aritmético. Embora “de natureza tão diferente”, geometria e aritmética devem ser consideradas em seu relacionamento.

Nosso objetivo aqui é explorar um aspecto particular de tal triângulo na abordagem de Pascal: a relação entre as extremidades de cada uma das bases do triângulo e o seu centro, através de uma abordagem de proporções. Tal trabalho é interessante por revelar a articulação do próprio autor ao encontrar alguns dos resultados deste célebre tratado, assim como possibilita revelar temas que podem ser relacionados a outras partes da obra matemática de Pascal, em particular as *Cartas de A. Dettonville*, que lidam com um método dos indivisíveis.

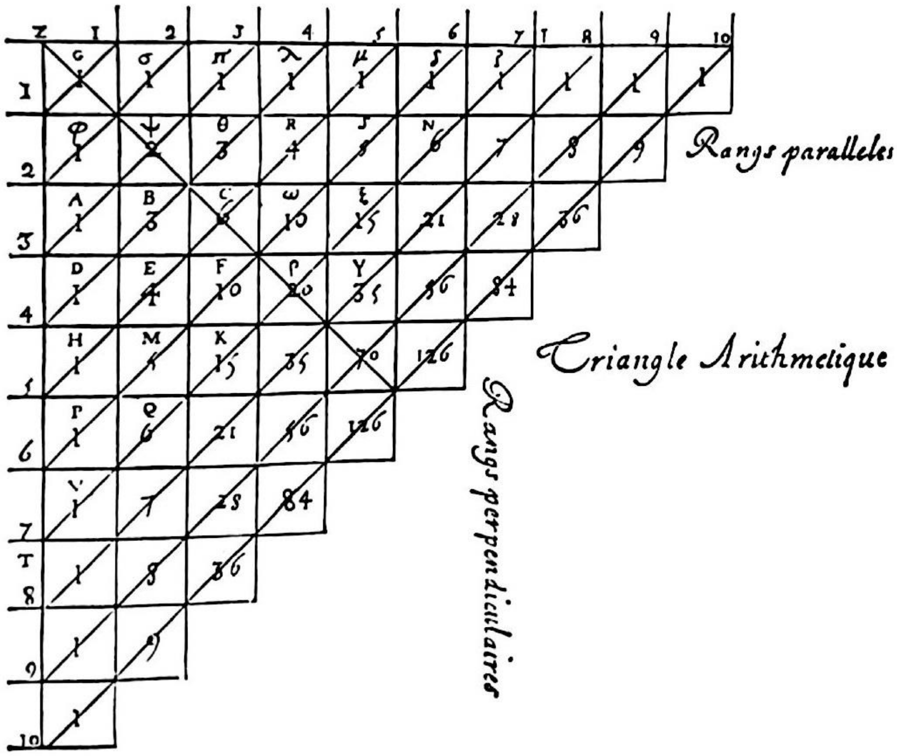
Cabe destacar que o presente artigo constitui um recorte com pequenas alterações de nossa tese de doutorado (CORTESE, 2017), ainda não publicado nem aparesentado em nenhum evento científico. Remetemos o leitor à tese para uma maior contextualização da questão na obra de Pascal.

O Tratado do triângulo aritmético

Sabemos hoje que o famoso triângulo aritmético não é uma invenção de Pascal, sendo muito mais antigo. Bosmans (1906) menciona, entre outros, Michael Stifel (1486/1487 - 1567), Jacques Peletier du Mans (1517 - 1582/1583), Tartaglia (Niccolò Fontana, 1499-1557), Albert Girard (1595-1632) e Simon Stevin (1548? – 1620) como antecessores de Pascal no que diz respeito ao triângulo. Bosmans sugere chamá-lo de "Triângulo de Stiffel". No entanto, sabemos hoje que precisamos voltar muito mais longe para avaliar a história do triângulo aritmético (cf. RASHED, 1972). Não obstante, é importante ressaltar que o triângulo aritmético de Pascal traz inovações importantes em comparação a outras versões, tanto em seus usos quanto em suas notações. Hara (1981, p. 87), por exemplo, observa que, diferentemente daqueles que usaram o triângulo antes dele, Pascal usa não apenas números, mas também letras, em cada uma das células do triângulo. Hara acredita que isso se deve ao fato de que os números concretos do triângulo são puros exemplos, as letras servindo para demonstrar as proposições gerais.

O triângulo de Pascal apresenta várias relações importantes entre suas células, uma das quais é particularmente conhecida: cada célula é igual à soma daquela que está à sua esquerda na mesma linha horizontal e daquela que está acima dela na mesma coluna (ver figura 1).

Figura 1: Imagem da segunda impressão do *Tratado do triângulo aritmético*



Fonte: Pascal (1970, p. 1289)

Conhecemos duas versões do *Tratado do triângulo aritmético*. Mesnard (*in* PASCAL, 1970, p. 1166) propõe que, mesmo que a publicação da segunda versão tenha sido feita apenas postumamente, em 1665, sua impressão foi realizada em 1654, data que assumimos para o tratado. A primeira das impressões é completamente em latim, enquanto a segunda tem uma parte em francês distinta em alguns aspectos, e uma sequência em latim idêntica à primeira versão – as chamaremos respectivamente de “versão latina” e de “versão francesa”. O termo latino *series*, por exemplo, que designa uma linha horizontal do triângulo, se torna, na versão francesa, “fila paralela” (*rang parallèle*); o termo latino *radix*, que designa uma coluna do triângulo, torna-se “fila perpendicular” (*rang perpendiculaire*). O “gerador” (*générateur*, na versão francesa), que se supõe ser a unidade na versão latina do tratado, pode ser um número qualquer na versão francesa (cf. DESCOTES, 2008 e DESCOTES, 2020, p. 174-175).

O triângulo aritmético de Pascal é famoso ao menos por duas razões. Em primeiro lugar, vemos nele um uso da indução matemática, de importância capital: embora os historiadores não considerem mais Pascal como o inventor desse procedimento de demonstração (Francesco Maurolico em particular o antecedendo), é certo que ele fez um uso notável dele. Em segundo lugar, seus usos se estendem à "regra dos partidos" que Pascal discutia à mesma época com Fermat – nesse contexto, o estudo de Pascal sobre o triângulo aritmético trouxe novos resultados em aritmética e em probabilidade. Na carta a Fermat de 29 de julho de 1654 sobre a regra dos partidos, Pascal propunha um problema: "Sendo dado o número de partidas que se queira, encontrar o valor da primeira" (PASCAL, 1970, p. 1139). O vocabulário do problema é delicado. "Partidas" (*parties*) designa aqui as etapas de um jogo entre dois jogadores, e não deve ser confundido com "partidos" (*partis*), termo que designa a divisão justa de uma aposta entre dois jogadores se um decide abandonar o jogo a uma certa etapa. Uma das aplicações do triângulo aritmético era destinada a tratar este problema.

Na próxima seção, consideraremos o triângulo aritmético em relação a um aspecto particular, que foi muito menos explorado pelos comentadores: a relação entre o centro e as extremidades de cada uma das bases do triângulo.

Células recíprocas – as proporções e a referência a um centro

Um dos pontos de proximidade que pode ser encontrado entre o triângulo aritmético e a balança do método dos indivisíveis de Dettonville está na articulação entre proporções estabelecidas e o *centro* (seja da base do triângulo, seja da balança).

Indiquemos que a balança aparece no "método geral para os centros de gravidade" das *Cartas de A. Dettonville*, que consiste em seccionar uma grandeza geométrica dada por uma série indefinida de planos paralelos, constituindo uma "balança" perpendicular a eles da qual penderão os "pesos" que são as porções da grandeza. Por meio de "somas triangulares", que podem ser entendidas como uma reformulação da Lei da alavanca arquimediana, Pascal pode então realizar cálculos para determinar o centro de gravidade de tais grandezas, assim como as suas áreas, volumes etc. (cf. CORTESE, 2017 e

CORTESE, 2019). Para a aplicação de tais somas triangulares, é fundamental tanto o conhecimento do centro da balança quanto o das suas extremidades.

Vejamos como isso aparece no *Tratado do triângulo aritmético*. No início do tratado, Pascal declara que é "fácil demonstrar" que, para "qualquer célula", se uma célula está na "fila paralela" i, na "fila perpendicular" j e na base k, vale a relação $i + j = k + 1$.

Assim, para a célula *F*, por exemplo (figura 1), temos 3 + 4 = 6 + 1, pois ela está na terceira fila paralela, na quarta fila perpendicular e na sexta base: "o que vem do fato de que os dois lados do triângulo são divididos em um igual número de partes; mas isso é antes compreendido do que demonstrado" (PASCAL, 1970, p. 1289).

O que Pascal quer dizer com isso? No que se segue, ele escreve que "essa observação é da mesma natureza, que cada base contém uma célula a mais que a precedente, e cada uma delas tantas quanto o seu expoente de unidades". Entendemos que isso significa que as bases crescem de maneira uniforme por acréscimo de unidades: cada uma tem uma célula a mais que a anterior, e seu número de células é o mesmo de seu "expoente" (*exposant*), ou seja, o número que indica a classificação da base[2]. A base de um triângulo contém o mesmo número de células que o seu "expoente" simplesmente porque os pontos unidos que formam as extremidades de cada base são oriundos das duas divisões (da fila paralela e da fila perpendicular), e correspondem em cada caso ao mesmo expoente: "*juntando assim todos os pontos de divisão que têm um mesmo expoente, formo tantos* triângulos e bases" (PASCAL, 1970, p. 1288; itálico no original).

Um aspecto fundamental do triângulo aritmético deve ser enfatizado: sua simetria. De fato, no triângulo aritmético, as células da segunda fila paralela são iguais às da segunda fila perpendicular e assim para todas as filas: uma fila paralela é sempre igual à fila perpendicular de mesmo número e vice-versa. Em geral, existe simetria – ainda que Pascal não use o termo "simetria" no *Tratado*

[2] Sendo assim, a base de expoente 1 será composta unicamente pela célula *G*; a base de expoente 2, pelas células φ e σ; a base de expoente 3, pelas células A, ψ e π; etc. O mesmo termo "expoente" é utilizado por Pascal para a classificação das filas paralelas e das filas perpendiculares.

do triângulo aritmético – em relação à linha diagonal que Pascal chama em francês de *dividente*, composta das células *G*, ψ, *C*, ρ...

Duas células, cujo expoente da fila perpendicular da primeira é igual ao expoente da fila paralela da segunda, e cujo expoente da fila paralela da primeira é igual ao expoente da fila perpendicular da segunda, são iguais. Pascal define mesmo essas células por um nome específico:

> *As células de uma mesma base igualmente distantes das suas extremidades são ditas recíprocas, como estas*, E, R, *e* B, θ, *porque o expoente da fila paralela de uma é o mesmo que o expoente da fila perpendicular da outra*. (PASCAL, 1970, p. 1288; itálico no original)

De fato, as células "recíprocas" são iguais (*Consectarium* 4 na versão latina, quinta consequência na versão francesa). A consequência seguinte (*Consectarium* 5) estabelece um resultado que exige também que os dois lados do triângulo sejam divididos em um mesmo número de partes:

> Tantas células corradicais [3] primeiras quanto se queira, procedendo de uma raiz qualquer, são iguais, uma a uma, a tantas células primeiras de uma fila cujo expoente é o mesmo número do que a raiz das corradicais. (PASCAL, 1970, p. 1182)

Assim, as células da segunda fila perpendicular, por exemplo (sempre na figura 1), serão iguais às células da segunda fila paralela, uma a uma: isto é, σ, ψ, B, E, M, Q serão iguais a φ, ψ, θ, R, S, N, "uma a uma" (*singulae singulis*). Esta correspondência é possível apenas porque há tantas (*totidem*) quantidades em uma fila quanto na outra. Já a versão francesa enfatiza menos este aspecto: "Em todo Triângulo aritmético, uma fila paralela e uma perpendicular que têm um mesmo expoente são compostas de células todas iguais umas às outras" (PASCAL, 1970, p. 1292).

As células recíprocas serão fundamentais à nossa discussão, pois, sendo "igualmente distantes" das extremidades (*aeque ab extremis remotae*), elas são iguais uma à outra (PASCAL, 1970, p. 1242). Mas é preciso antes passar pelo primeiro dos resultados que Pascal demonstra por indução matemática. A

---

[3] **Células "corradicais" (*corradicales*) são aquelas que pertencem à mesma fila perpendicular.**

proporção em questão também dirá respeito aos expoentes e às distâncias das células às extremidades, mas as distâncias não precisam mais ser necessariamente iguais (como no caso das células recíprocas), pois são tomadas agora em relação a duas células contíguas. A proposição é preparada por uma *Advertência*:

> *Todas essas consequências são sobre o tema das igualdades que se encontram no Triângulo aritmético. Vamos agora ver as proporções delas, cuja proposição que se segue é o fundamento*. (PASCAL, 1970, p. 1294; itálico no original)

Como as distâncias às extremidades não serão mais iguais, não será mais o caso de simples igualdade, mas sim de "proporções". Nesse caso, se tratará de uma proporção entre a razão dos expoentes e a razão das distâncias às extremidades. A décima segunda consequência é a seguinte:

> Em todo Triângulo aritmético, duas células contíguas estando em uma mesma base, a superior está para a inferior assim como a quantidade [*multitude*] das células desde a superior até o alto da base está para a quantidade daquelas desde a inferior até em baixo, inclusivamente. (PASCAL, 1970, p. 1294)

A demonstração desta proposição é célebre, porque fornece uma formulação mais explícita do princípio da indução matemática do que existira antes na história. Como a proposição é válida para "uma infinidade de casos" (porque há uma infinidade de bases de triângulos), Pascal propõe demonstrá-la por meio de dois lemas. O primeiro estabelece que a proposição é válida para a segunda base, enquanto o segundo propõe que, se essa proposição for válida para uma base, também será válida para a base seguinte. Ao demonstrar os dois lemas, reconhecemos que Pascal demonstra a proposição para a infinidade dos casos por meio da indução matemática. Mas o que nos interessa aqui é um outro aspecto dessa proposição.

Enfatizemos em primeiro lugar uma característica de seu modo de escrita. Em vez de falar sobre a relação entre a "quantidade de células", também poderíamos falar sobre a relação recíproca dos expoentes, "pois não se trata senão da mesma coisa" (PASCAL, 1970, p. 1298), como indica uma *Advertência* sobre a décima oitava consequência da versão francesa (*Consectarium* 17 da versão latina).

Para as versões latina e francesa, o exemplo é o mesmo: as células *E* e *C* estão na mesma razão que aquela entre 2 e 3:

$$E : C :: 2 : 3$$

A versão latina identifica o número 2 ao expoente da raíz (*radix*) da célula *E*, e o número 3 ao expoente da fila (*series*) da célula *C*. Quanto à versão francesa, ela identifica esses números às distâncias das extremidades da base: para *E*, há duas células “até em baixo”, *E* e *H*; por outro lado, para *C* há três células “até em cima”: *C*, *R* e μ. Ou seja, a razão entre as distâncias das células contíguas às extremidades e a razão entre seus expoentes recíprocos é a mesma, e intercambiável. Cabe notar que a “distância” é considerada aqui inclusivamente, ou seja, contando a própria célula em questão.

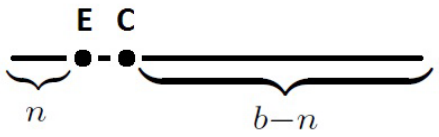
Gostaríamos de fazer uma observação sobre a noção de *distância à extremidade* da base. No caso de dois elementos contíguos, como é o caso da *décima segunda consequência*, conhecer suas distâncias às extremidades da base é equivalente a conhecer suas distâncias ao centro da base, pois o centro é, por definição, equidistante das extremidades.

Podemos representar isso da seguinte maneira: se *E* e *C* são células contíguas na mesma base, e se *n* é a distância de *E* à extremidade da base, a distância da célula *C* à outra extremidade da base será *b*-*n*, sendo o número *b* o expoente dessa base, igual à quantidade de suas células (figura 2). Isso é válido apenas porque as duas células são contíguas, ou seja, a distância entre elas é 1. É claro que poderíamos fazer o mesmo se a distância entre as duas fosse diferente de 1, mas conhecida; no entanto, esse não é o caso de Pascal.

Tomemos então a célula no centro desta base, se houver uma – para o triângulo aritmético, efetivamente surge a questão de se há um elemento no centro. Se o número de elementos na base for par, não haverá elemento no centro da base. Negligenciamos isso para falar sobre a distância ao centro, mas para que o modelo pascaliano fosse rigoroso, certamente seria preciso levar isso em conta.

Tal célula central estará a distância $\frac{(b+1)}{2}$ das extremidades (pois contamos inclusivamente a própria célula na distância). As distâncias de *E* e de *C* ao centro da base serão dadas, respectivamente, por $\left|\frac{(b+1)}{2} - n\right|$ e por $\left|\frac{(b+1)}{2} - (b-n)\right| = \left|\frac{(-b+1)}{2} + n\right|$. Além disso, vimos que as distâncias às extremidades e as razões dos expoentes são intercambiáveis.

Figura 2. Esquema para a base *b*, na qual a célula *E* é contígua à célula *C*.



Fonte: elaborada pelo autor.

Mas o que importa para nós aqui é que, no caso de células contíguas, a distância às extremidades pode ser "traduzida" por uma distância ao centro.

Na Lei da alavanca (assim como no modelo da balança de Dettonville indicado acima) é necessário levar em consideração a distância de um elemento ao *centro* da balança, enquanto no triângulo aritmético é necessário considerar as distâncias às extremidades da base.

Podemos então dizer que a *décima segunda consequência* é, em certo sentido, equivalente à Lei da alavanca, porque expõe uma proporção que compreende uma razão entre dois elementos e uma razão entre duas distâncias (às extremidades, mas que podem ser transformadas em duas distâncias ao centro). No entanto, é necessário esclarecer as diferenças entre as duas situações. A décima segunda consequência é válida para um único caso: o dos elementos contíguos[4]. Mais importante é a diferença de natureza dos elementos que se enquadram nessas proporções. Se, no caso da balança de Dettonville,

[4] Isso não seria um problema se, como mencionamos, dados quaisquer elementos de uma base, a distância entre eles também fosse dada.

tomamos elementos que terão “pesos” de acordo com a grandeza geométrica da qual fazem parte, mudando para cada grandeza, no triângulo aritmético seu lugar no todo é suficiente para determiná-los e determinar sua razão às distâncias. A proporção entre elementos específicos do triângulo será sempre a mesma, independentemente do gerador do triângulo aritmético, que pode ser a unidade ou outro número.

Lembremos, finalmente, que a importância da décima segunda consequência vem de esta ser o “fundamento” (PASCAL, 1970, p. 1294) das proporções do triângulo aritmético, como diz Pascal. As conclusões com relação à forma proporcional são então válidas para o triângulo aritmético em geral.

Esse fato é importante porque o uso de proporções, acompanhado pela identificação de um ponto de referência (seja o centro ou as extremidades), é suficiente para determinar elementos. Sejam as células do triângulo aritmético ou os “pesos” da balança de Dettonville, a quarta proporcional aparece tanto na décima segunda consequência do triângulo aritmético quanto no “método geral para os centros de gravidade” – que pode ser interpretado como uma reformulação da Lei da alavanca.

A proporção aparece aqui como um operador, no sentido de possibilitar o cálculo de um elemento ausente. Mas uma proporção, por si só, não calcula nada: ela mostra relações. É apenas com uma referência que os valores podem ser deduzidos: uma referência que pode ser uma unidade de base estabelecida ou uma primeira razão determinada; neste caso, são as distâncias às extremidades que, como mostramos, são equivalentes à distância ao centro – aspecto pelo qual retornamos ao modelo da balança. Se a proporção fornece uma relação, as extremidades ou o centro fornecem a substância, por assim dizer, com respeito à qual essa relação é estabelecida.

A questão sobre o estabelecimento das relações pode, assim, ser colocada. Em seu aspecto mais profundo – por que estabelecer relações? –, ela é discutida de maneira singular no fragmento *Desproporção do homem*:

> Mas as partes do mundo têm todas uma tal relação [*rapport*] e um tal encadeamento uma com a outra que creio ser impossível conhecer uma sem a outra e sem o todo.

> (PASCAL, 2005 - *Pensamentos*, fragmento Lafuma 199, Sellier 230)

Por outro lado, as diferentes relações, ou melhor, as diferentes formulações das mesmas relações, são importantes para revelar sua equivalência: “assim se multiplicam as proposições, e não sem utilidade; pois enunciados diferentes, embora relativos a uma mesma proposição, se prestam a diferentes usos” (PASCAL, 1970, pp. 1202-1203).

Um caso particular deve ainda ser comentado quanto ao uso da linguagem relativa ao triângulo aritmético. Se consideramos células recíprocas, elas estão, por definição, igualmente distantes às extremidades da base. Pascal considerará também as filas que estão à mesma distância das extremidades do triângulo. Lemos na *consectarium* 17:

> Em todo triângulo aritmético, duas filas igualmente distantes das extremidades estão entre elas em razão recíproca de seus expoentes. (PASCAL, 1970, p. 1191)

O exemplo dado é aquele do triângulo GVζ, segundo a proporção que podemos formular segundo a figura 3.

Figura 3. Representação da proporção dada pela *consectarium* 17 entre as filas (*series*) de células do triângulo GVζ.

$$(\underbrace{\phi+\psi+\theta+R+S+N}_{\text{series secunda}}):(\underbrace{P+Q}_{\text{series sexta}})::6:2$$

Fonte: elaborada pelo autor.

Pascal justifica assim que ele tenha escolhido a segunda e a sexta filas:

> Eu comparo a segunda fila à sexta, porque a sexta fila está à mesma distância da sétima fila *V*, a última do sétimo triângulo, que a segunda fila está da primeira. (PASCAL, 1970, pp. 1191-1192)

De acordo com esta proposta, as filas consideradas estão na razão recíproca de seus expoentes. Mas essas próprias filas mantêm uma relação entre elas: elas estão à mesma distância das extremidades do triângulo. Como já dissemos, distâncias às extremidades e expoentes recíprocos são intercambiáveis neste caso.

O modo de expressão de Pascal aqui é particularmente interessante: *tantum distat A a X, quantum B distat a Y*. Reconhecemos uma linguagem clássica para as relações, que existe, por exemplo, na linguagem medieval para falar de atributos divinos, em particular na obra de S. Tomás de Aquino: *quantum distat Deus ab homine, tanto voluntas Dei ab hominis voluntate* (*De veritate*, q. 23, a. 7 – cf. AQUINO, 2011). Trata-se de uma "analogia da desproporção" (CORTESE, 2021): uma coisa está tão afastada de uma segunda quanto uma terceira está de uma quarta. A analogia de desproporção, uma ferramenta da linguagem que parte das diferenças, permite, assim, proporcionar uma certa unidade através de relação.

Considerações finais

Um dos modos de comparação do triângulo aritmético, caracterizado por sua simetria, é dizer que uma célula está tão distante da extremidade da base quanto outra célula está afastada da outra extremidade (caso das células ditas "recíprocas"). O fato de duas células estarem igualmente distantes das extremidades constituiria uma falta de referência no interior do triângulo aritmética? Na verdade, como vimos, a inserção das distâncias às extremidades nas relações (em particular nas proporções) permite, em especial, encontrar a referência que é o centro da base, através das distâncias das células contíguas a ele. Tal fato é relevante para indicar como Pascal entende as relações entre as células do triângulo aritmético, o que pode inclusive (a partir de categorias mais gerais, tais como a de "centro" e "extremidades") iluminar relações com outras partes da obra matemática de Pascal, como as *Cartas de A. Dettonville* (cf. CORTESE, 2017). A análise apresentada aqui permite ver como os resultados associados ao *Tratado do triângulo aritmético*, célebre em particular pelo uso do princípio de indução matemática, revelam uma série de detalhes interessantes quando lidos na sua formulação original.

REFERÊNCIAS

AQUINO, Tomás de. **Questions disputées : De veritate, I, questions 1-13**. Trad. A. Aniorté, O. S. B. La Barroux: Sainte Madaleine, 2011.

BOSMANS, H. **Note historique sur le triangle arithmétique de Pascal**. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles 31, p. 67–71, 1906.

CORTESE, J. F. N. **L'infini en poids, nombre et mesure : la comparaison des incomparables dans l'oeuvre de Blaise Pascal**. Tese de doutorado em cotutela, Université de Paris 7 – Denis Diderot & Universidade de São Paulo, 2017.

CORTESE, J. F. N. **"Um Nada em relação ao infinito": O aniquilamento na comparação pascaliana**. Cadernos Espinosanos, 40, p. 35-64, 2019.

CORTESE, J. F. N. B. **L'analogie de disproportion et la "pondération" des indivisibles Deux formes de comparaison des incomparables chez Blaise Pascal**. Revue des Questions Scientifiques, 192, 1-2, p. 7-67, 2021.

DESCOTES, D. **Construction du triangle arithmétique de Pascal**. *In*: DESCOTES, D.; SERFATI, M. Mathématiciens français du XVIIe siècle. Descartes, Fermat, Pascal. Clermont-Ferrand: Presses Universitaires Blaise Pascal, 2008, p. 239-280.

DESCOTES, D. **Sur la genèse du Traité du Triangle arithmétique**. *Courrier Blaise Pascal*, 41-42, 2020, p. 155-180. Disponível em: http://journals.openedition.org/cbp/387. Acesso em 3 de fevereiro de 2023.

HARA, K. **L'oeuvre mathématique de Pascal**. Osaka: Osaka University Press, 1981.

MERKER, C. **Le chant du cygne des indivisibles – le calcul intégral dans la dernière oeuvre scientifique de Pascal**. Besançon: Presses universitaires de Franche-Comté, 2001. Disponível em: https://pufc.univ-fcomte.fr/media/catalog/product/documentpdf/doc_en_ligne/ouvrages_en_ligne/chant_du_cygne.pdf. Acesso em: 20 de dezembro 2022.

PASCAL, B. **OEuvres complètes**. Edição de Jean Mesnard. Paris: Desclée de Brouwer, Volume II, 1970.

PASCAL, B. **Pensamentos**. Tradução de Mario Laranjeira a partir da edição Lafuma. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

PASCAL, B. **Tratado sobre o Triângulo Aritmético**. Trad. de John A. Fossa e Fabricio Possebon. Comentário de John A. Fossa. Natal: Editora da UFRN, 2013.

RASHED, R. **L'induction mathématique: al-Karaji, as-Samaw'al**. *Archive for History of Exact Sciences* 9, 1972, p. 1–21.